technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Nichttriviale Lösungen einer semilinearen Gleichung mit kritischem Sobolev-Exponenten

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Timo Sprekeler

im Juli 2016

Betreuung: Prof. Dr. Ben Schweizer

Fakultät für Mathematik

TU Dortmund

0 Zusammenfassung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem semilinearen elliptischen Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.1}$$

mit $p := 2^* - 1 = \frac{n+2}{n-2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Unser Ziel ist es, Bedingungen an λ zu formulieren, so dass (0.1) eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ besitzt. Dabei ist es uns wichtig, eine scharfe Bedingung an λ aufzustellen, d.h. sobald λ die gestellte Bedingung nicht erfüllt, sollen Gebiete existieren, auf denen (0.1) keine Lösung besitzt. Wir folgen in dieser Ausarbeitung im Wesentlichen der Darstellung in [BN83] und alle von uns präsentierten Aussagen und Beweise ohne angegebene Referenz beziehen sich darauf.
Konkret sind wir wie folgt vorgegangen:
Unsere Lösungsstrategie ist das Lösen des restringierten Minimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{p+1} = 1 \end{cases} . \end{aligned} \tag{0.2}$$

Zunächst diskutieren wir in Kapitel 2 als Einführung den subkritischen Fall $2 < p+1 < 2^*$. Wir werden für geeignete λ mit der direkten Methode der Variationsrechnung und der schwachen Abgeschlossenheit der Nebenbedingungsmenge eine Lösung des Minimierungsproblems (0.2) erhalten. Die schwache Abgeschlossenheit folgt dabei aus der Kompaktheit der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ für $p+1 < 2^*$. Der abstrakte funktionalanalytische Satz über die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren, welchen wir zu Beginn von Kapitel 2 einführen werden, liefert dann eine Gleichung für den gefundenen Minimierer, die wir durch Skalierung auf die gewünschte Form aus (0.1) bringen können. Die Positivität der Lösung schließen wir mit dem starken Maximumprinzip für subharmonische Funktionen.
Anschließend starten wir in Kapitel 3 mit der Behandlung des eigentlichen Problems $p + 1 = 2^*$. Nun steht uns im Gegensatz zum kritischen Fall keine Kompaktheitsaussage zur Verfügung, da die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ nicht kompakt ist. Als Konsequenz ist es uns nicht möglich, die schwache Abgeschlossenheit der Nebenbedingungsmenge aus (0.2) zu zeigen und wir müssen anders argumentieren. Dazu betrachten wir

$$S_\lambda := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\}$$

und die *beste* Einbettungskonstante für die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$:

$$S := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \|\nabla u\|_2^2.$$

Eine Funktion u, welche S_λ realisiert, löst offenbar (0.2) und wir können dann wie im subkritischen Fall auf eine Lösung des Ausgangsproblems (0.1) schließen. Wir werden sehen, dass die ausschlaggebende Bedingung für die Existenz einer solchen Funktion u, die Relation $S_\lambda < S$ sein wird, so dass wir uns *nur* noch überlegen müssen, für welche λ diese Relation gilt. Erstaunlicherweise müssen wir dabei die Raumdimensionen $n = 3$ und $n > 3$ separat betrachten. Dabei werden wir im Fall $n = 3$ nur ein Existenzresultat für Kugeln beweisen.
Abschließend wollen wir in Kapitel 4 zeigen, dass die geforderten Bedingungen an λ, welche in Kapitel 3 gefunden wurden, auch tatsächlich notwendig sind. Um dem nachzukommen, werden wir einige Nichtexistenzresultate formulieren und beweisen. Die nötigen Mittel dafür sind im Wesentlichen die sogenannte Pohozaev-Identität und ein Symmetrieresultat für glatte Lösungen von (0.1). Da wir aber nicht lediglich die Existenz von glatten Lösungen für gewisse λ ausschließen wollen, verwenden wir darüber hinaus noch eine Regularitätsaussage für Lösungen von (0.1) auf glatten Gebieten.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Historische Bemerkungen

Partielle Differentialgleichungen (engl.: **P**artial **D**ifferential **E**quation(s)) bilden ein großes Teilgebiet der angewandten Analysis und dienen der Modellierung von Vorgängen aus allen naturwissenschaftlichen Bereichen. Die Untersuchung von PDEs, vorwiegend im Bereich Kontinuumsmechanik, begann im 18. Jahrhundert mit wichtigen Beiträgen von Lagrange, d'Alembert, Euler und Laplace. Seit dem 19. Jahrhundert stellen PDEs neben dem Modellierungsaspekt auch ein wichtiges Hilfsmittel für andere Teilgebiete der Mathematik dar. Diese historischen Informationen sind [BB98] entnommen.
Die Frage nach der Existenz einer Lösung ist neben der nach der Eindeutigkeit von Lösungen fundamental bei der Analyse einer PDE. Während die Existenzfrage bei linearen PDEs verhältnismäßig einfach zu beantworten ist, ist sie bei nichtlinearen PDEs weitaus schwieriger zu klären und steht daher bis heute im Fokus der modernen mathematischen Forschung.
Wir untersuchen das nichtlineare Randwertproblem (0.1) auf die Existenz einer schwachen Lösung, d.h. wir suchen ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u > 0$ fast überall in Ω und

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega u^p \varphi + \lambda \int_\Omega u\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $q = p + 1 = 2^*$ der kritische Sobolev-Exponent für die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
PDEs mit kritischem Exponenten kommen tatsächlich in einigen Bereichen der Mathematik vor. Das bekannteste Beispiel ist das aus der Differentialgeometrie stammende *Yamabe Problem* aus dem Jahre 1960, benannt nach dem japanischen Mathematiker H. Yamabe. Yamabe behauptete, dass es für eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, d) der Dimension $n \geq 3$ eine zu d konforme Metrik d' mit konstanter Skalarkrümmung gibt.
Es lässt sich zeigen, dass dieses Problem äquivalent zur Frage nach der Existenz einer Funktion u mit $u > 0$ in M und

$$-4\frac{n-1}{n-2}\Delta_d u + Ru = Cu^p \quad \text{in } M$$

ist. Dabei ist C eine Konstante, R die Skalarkrümmung der Metrik d und $p = 2^* - 1$.
Nachdem N. Trudinger einen Fehler im ursprünglichen Beweis von Yamabe entdeckt hat, befasste sich der französische Mathematiker T. Aubin mit dem Problem und erhielt 1975 eine Lösung für Dimensionen $n \geq 6$. Die restlichen Fälle wurden schließlich vom amerikanischen Mathematiker R. Schoen analysiert.
Die obigen Informationen zum Yamabe Problem entstammen [BB98]. Für weitere Beispiele mit kritischem Exponenten sei auf [BN83] verwiesen.
Bei der Analyse unseres Modellproblems (0.1) folgen wir dem Vorgehen von H. Brezis und L. Nirenberg in [BN83], welches auf einer früheren Arbeit von Aubin

zum Yamabe-Prolem basiert, vgl. [Aub76].
Für unsere Nichtexistenzresultate greifen wir auf die nach dem russischen Mathematiker S. Pohozaev benannte Pohozaev-Identität zurück und machen Gebrauch von einem Symmetrieresultat von Gidas, Ni und Nirenberg, vgl. [GNN79].

1.2 Zusammenstellung der Ergebnisse

Wir wollen anhand von Bifurkationsdiagrammen die Ergebnisse dieser Arbeit zusammenstellen, vgl. [AM07, p. 181]. Für den subkritischen Fall nimmt das Bifurkationsdiagramm für Lösungen von (0.1) die folgende Gestalt an.

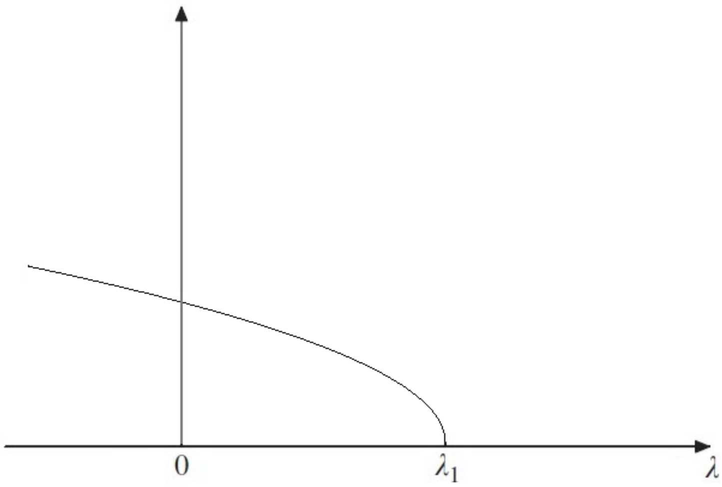

Abb. 1: Bifurkationsdiagramm für Lösungen von (0.1) auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ bei subkritischem Exponenten $2 < p + 1 < 2^*$.

Das Diagramm ist wie folgt zu verstehen: Ein Punkt auf dem Graphen stellt eine Lösung der Gleichung dar. Gibt es zu einem Wert λ ein $y \neq 0$, so dass der Punkt (λ, y) auf dem Graphen liegt, so existiert zu diesem λ eine (nichttriviale) Lösung von (0.1). Andererseits stehen Punkte (λ, y) mit $y = 0$ für triviale Lösungen der Gleichung. Diese lösen nicht das Randwertproblem (0.1).
Zunächst ist festzustellen, dass für $\lambda < \lambda_1$ eine Lösung des subkritischen Problems existiert. Insbesondere muss keine Positivität an λ für die Existenz einer Lösung gefordert werden, d.h. es existieren auch Lösungen im Fall $\lambda \leq 0$. Diesen Existenzbeweis werden wir in Abschnitt 2 führen, vgl. Satz 2.2.
Außerdem können wir der Abbildung entnehmen, dass für $\lambda \geq \lambda_1$ keine Lösung des Problems existiert. Dieses Resultat werden wir im Abschnitt Nichtexistenzresultate beweisen, vgl. Satz 4.1.
Des Weiteren ist festzuhalten, dass wir ein und dasselbe Bifurkationsdiagramm für alle Raumdimensionen $n \geq 3$ erhalten. Dass dies nicht selbstverständlich ist, zeigen die Bifurkationsdiagramme für den kritischen Fall, welche wir nun diskutieren werden. Es sind die Raumdimensionen $n > 3$ und $n = 3$ separat zu betrachten.

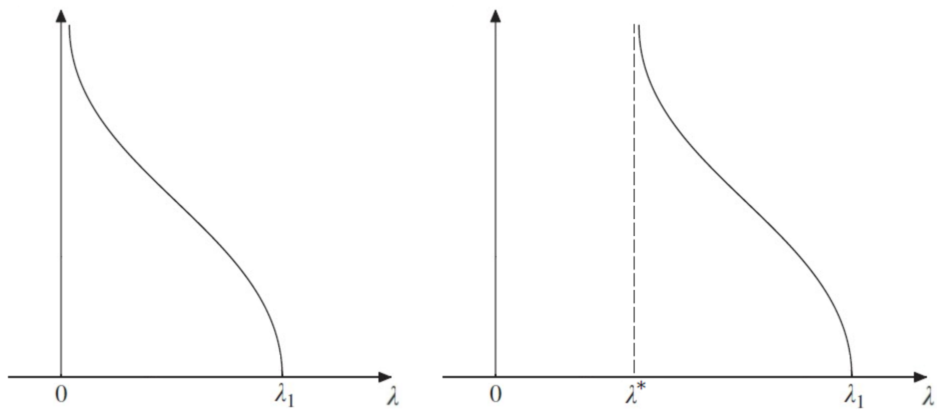

Abb. 2: Bifurkationsdiagramm für Lösungen von (0.1) auf einem beschränkten strikt sternförmigen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um den Ursprung bei kritischem Exponenten $p+1 = 2^*$. *links*: Dimension $n > 3$, *rechts*: Dimension $n = 3$.

Wir wollen Parallelen und Unterschiede zum subkritischen Fall feststellen. Es ist leicht zu erkennen, dass die einzige Gemeinsamkeit zwischen den Abbildungen 1 und 2 darin besteht, dass beide die Nichtexistenz für $\lambda \geq \lambda_1$ beinhalten. Tatsächlich werden wir beim Nichtexistenzbeweis für $\lambda \geq \lambda_1$ den kritischen und den subkritschen Fall auf einmal behandeln, vgl. Satz 4.1.
Wir betrachten zunächst das Diagramm für Raumdimensionen $n > 3$ genauer. Der Hauptunterschied zu Abbildung 1 ist die Nichtexistenz für $\lambda \leq 0$. Während im subkritischen Fall auch Lösungen für $\lambda \leq 0$ existieren, ist die Positivität von λ im kritischen Fall notwendig für die Existenz einer Lösung. Dieses Nichtexistenzresultat werden wir aus der Pohozaev-Identität schließen, vgl. Satz 4.3 und Korollar 4.5.
Weiter verrät das Diagramm, dass für $\lambda \in (0, \lambda_1)$ eine Lösung des kritischen Problems existiert, vgl. Satz 3.5. Ferner ist das singuläre Verhalten der kritischen Kurve für $\lambda = 0$ auffällig, was sich wie folgt erklären lässt: Für eine beschränkte Folge von Lösungen (u_k) des kritischen Problems zu $\lambda_k \searrow 0$ würden wir eine Teilfolge finden, welche das Problem zu $\lambda = 0$ löst, im Widerspruch zum oben genannten Nichtexistenzresultat.
Nun wollen wir das Diagramm für Raumdimension $n = 3$ diskutieren. Aus dem Bifurkationsdiagramm können wir schließen, dass genau dann eine Lösung existiert, wenn $\lambda \in (\lambda^*, \lambda_1)$ mit einer Schranke $\lambda^* \geq 0$, vgl. Satz 5.1. Wir werden das Problem in drei Dimensionen aber nicht für allgemeine Gebiete lösen, sondern betrachten nur Kugeln und werden $\lambda^* = \frac{\lambda_1}{4}$ erhalten. Dabei führen wir die Beweise nur für die Einheitskugel, vgl. Satz 3.7 und Korollar 4.8, geben aber eine Verallgemeinerung auf beliebige Kugeln an, vgl. Bemerkung 3.8 und Bemerkung 4.9.
Schließlich begründet sich das singuläre Verhalten der Kurve wieder genau wie oben beschrieben aus der Nichtexistenz für $\lambda \leq \lambda^*$.

2 Der subkritische Fall: Existenz von Lösungen

Wir betrachten das Problem (0.1), also

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ unter der Voraussetzung $2 < p+1 < 2^*$. Wir werden sehen, dass wir das Problem mit der direkten Methode behandeln können und es wird klar, wo die Schwierigkeiten im kritischen Fall liegen.
Ein wichtiges Hilfsmittel sowohl für den subkritischen als auch den kritischen Fall ist das Konzept der Lagrange-Multiplikatoren.

2.1 Langrange-Multiplikatoren

Ziel dieses Unterabschnitts ist die Konstruktion eines Ersatzes für die Euler-Lagrange Gleichung für restringierte Minimierungsprobleme. Wir folgen dabei der Darstellung in [Sch13, pp. 271-273].

Gegeben seien ein Hilbertraum X und zwei Funktionale $A, \phi : X \to \mathbb{R}$. Das Funktional ϕ beschreibt dabei die Nebenbedingung, so dass die Aufgabe lautet:

$$\text{Finde } u^* \in N := \{\phi = 0\} \text{ mit } A(u^*) = \inf\{A(v) | v \in N\}.$$

Wir fragen uns nun, unter welchen Voraussetzungen eine Gleichung für den Minimierer u^* gilt. Das folgende fundamentale Resultat der Funktionalanalysis beantwortet uns diese Frage.

Satz 2.1 (Lagrange-Multiplikatoren)**.** *Seien X ein Hilbertraum, $u^* \in X$ und $A, \phi \in C^1(X; \mathbb{R})$ stetig Fréchet-differenzierbare Funktionale auf X. Es gelten die folgenden Bedingungen:*

($L1$) *Die lineare Abbildung $D\phi(u^*) : X \to \mathbb{R}$ sei surjektiv.*

($L2$) *Zulässigkeit: $u^* \in N := \{u \in X | \phi(u) = 0\}$*

($L3$) *Minimalitätseigenschaft: $A(u^*) = \inf\{A(v) | v \in N\}$*

Dann existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle DA(u^*), \varphi \rangle = \mu \langle D\phi(u^*), \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in X. \tag{2.2}$$

Beweis. Zunächst zerlegen wir X orthogonal in $X = K \oplus_\perp R$ mit $K :=$ Kern$\,(D\phi(u^*))$. Aus der Eigenschaft ($L1$) folgt dann die Bijektivität der linearen stetigen Abbildung $D\phi(u^*)|_R : R \to \mathbb{R}$ und somit die Existenz einer stetigen Inversen. Weiter folgt aus ($L1$), dass R eindimensional ist.

Wir definieren nun $\tilde{\mu} := DA(u^*) \circ \left(D\phi(u^*)|_R\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die so definierte Abbildung $\tilde{\mu}$ ist linear und stetig, also darstellbar als $\tilde{\mu}(x) = \mu x$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass dieses μ bereits die Relation (2.2) erfüllt.

Sei $\varphi_K \in K$ beliebig. Wir betrachten einen stetig differenzierbaren Weg $\gamma \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon);N)$ mit $\gamma(0) = u^*$ und $\gamma^{'}(0) = \varphi_K$. Aus der Minimalitätseigenschaft $(L3)$ folgt die Minimalität von $Q(t) := A(\gamma(t))$ in $t = 0$. Die Abbildung $Q : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ ist als Verkettung stetig differenzierbarer Abbildungen selbst stetig differenzierbar und wir können schließen

$$0 = Q^{'}(0) = \langle DA(\gamma(0)), \gamma^{'}(0)\rangle = \langle DA(u^*), \varphi_K\rangle.$$

Da $\varphi_K \in K$ gewählt war, ist die rechte Seite in (2.2) ebenfalls 0 und damit die gewünschte Relation für φ_K erfüllt.

Sei nun $\varphi_R \in R$ beliebig. Dann ist

$$\mu\langle D\phi(u^*), \varphi_R\rangle = \tilde{\mu}(\langle D\phi(u^*), \varphi_R\rangle) = \langle DA(u^*), \varphi_R\rangle,$$

und somit (2.2) für φ_R erfüllt.

Zusammen folgt aus $X = K \oplus_\perp R$ die Relation (2.2) für alle $\varphi \in X$. $\square$

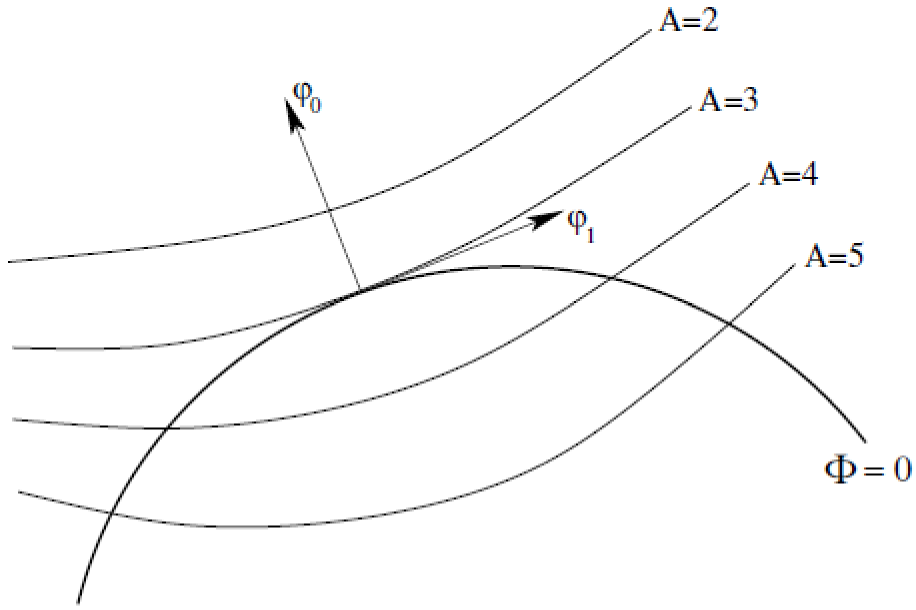

Abb. 3: Zerlegung in tangentiale und normale Variationen an N ($\varphi_0 \in R$, $\varphi_1 \in K$)

Die obige Abbildung verdeutlicht die Beweisidee von Satz 2.1 und entstammt [Sch13, p. 272]. Für einen rigorosen Nachweis der Existenz eines Weges γ aus obigem Beweis sei auf [Sch13, p. 273] verwiesen. Wesentliches Hilfsmittel dabei ist die Darstellung der Nebenbedingungsmenge N als Graph mithilfe des Satzes über implizite Funktionen im Banachraum. Des Weiteren behält der Satz auch bei mehr als einer Nebenbedingung, also für $\phi : X \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ seine Gültigkeit. Der Beweis verläuft analog, man beachte allerdings $\dim R = m$ und $\mu \in \mathbb{R}^m$.

2.2 Existenz bei subkritischem Exponenten

Nun wollen wir den Satz über die Existenz von Lagrange-Multiplikatoren im Hilbertraum $X := H_0^1(\Omega)$ anwenden, um Lösungen unserer PDE (2.1) zu erhalten.
Wir werden das Funktional

$$A : X \to \mathbb{R},\ A(u) := \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \tag{2.3}$$

auf der Sphäre $N := \{u \in X | \|u\|_{p+1} = 1\}$ minimieren. Wir setzen daher

$$\phi : X \to \mathbb{R},\ \phi(u) := \frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1} - \frac{1}{p+1},$$

so dass $N = \{u \in X | \phi(u) = 0\}$. Es ist nicht schwer nachzurechnen, dass A und ϕ von der Klasse $C^1(X;\mathbb{R})$ sind, mit den Ableitungsvorschriften

$$DA(u) : X \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \langle DA(u), \varphi\rangle := 2\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla\varphi - \lambda u\varphi\right), \tag{2.4}$$

$$D\phi(u) : X \to \mathbb{R}, \varphi \mapsto \langle D\phi(u), \varphi\rangle := \int_\Omega |u|^{p-1}u\varphi \tag{2.5}$$

für $u \in X$. Bevor wir nun zu unserem ersten Existenzsatz kommen, wiederholen wir an dieser Stelle die Rayleigh-Ritz Charakterisierung des kleinsten Eigenwerts von $-\Delta$ zu homogenen Dirichlet-Randbedingungen als Infimum des Rayleigh-Quotienten:

$$\lambda_1 := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}.$$

Nun ist die nötige Vorarbeit getan und wir können unseren ersten Existenzsatz beweisen. Als Referenz sei hier [Str08, pp. 14-16] angegeben.

Satz 2.2 (Existenzsatz für subkritischen Fall)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet und $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zum subkritischen Problem* (2.1)*.*

Beweis. Wir minimieren A aus (2.3) auf der Menge N. Dazu überprüfen wir die Voraussetzungen der direkten Methode der Variationsrechnung.

(Reflexivität) Der Raum $X = H_0^1(\Omega)$ ist als Hilbertraum reflexiv.

(Beschränktheit) Unmittelbar aus der Definition von λ_1 folgt für $\lambda > 0$

$$A(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla u\|_2^2$$

und für $\lambda \leq 0$

$$A(u) = \|\nabla u\|_2^2 - \lambda\|u\|_2^2 \geq \|\nabla u\|_2^2.$$

Zusammen liefert dies für $\lambda < \lambda_1$

$$A(u) \geq \min\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}, 1\right\}\|\nabla u\|_2^2 \geq 0. \tag{2.6}$$

(Koerzivität) Die Koerzivität von A folgt direkt aus (2.6) und der Poincaré-Ungleichung.

(schwache Unterhalbstetigkeit) Zunächst ist festzustellen, dass sich aus der Poincaré-Ungleichung für $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\|\nabla u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 + \|u\|_2 = \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1+C)\|\nabla u\|_2$$

ergibt. Somit ist $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_2$ für $u \in H_0^1(\Omega)$ eine zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalente Norm auf $H_0^1(\Omega)$.
Sei nun $(u_k)_k$ eine Folge in $H_0^1(\Omega)$ mit $u_k \rightharpoonup \tilde{u}$ in $H_0^1(\Omega)$. Die schwache Unterhalbstetigkeit der Norm impliziert

$$\|\nabla \tilde{u}\|_2^2 \leq \liminf \|\nabla u_k\|_2^2.$$

Nach dem Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachov gilt nach Übergang zu einer Teilfolge

$$u_k \longrightarrow \tilde{u} \text{ stark in } L^2(\Omega),$$

also können wir schließen

$$\begin{aligned} A(\tilde{u}) = \|\nabla \tilde{u}\|_2^2 - \lambda\|\tilde{u}\|_2^2 &\leq \liminf \|\nabla u_k\|_2^2 - \lambda \lim \|u_k\|_2^2 \\ &\leq \liminf \left\{\|\nabla u_k\|_2^2 - \lambda\|u_k\|_2^2\right\} \\ &= \liminf A(u_k). \end{aligned}$$

(schwache Abgeschlossenheit von N) Sei $(u_k)_k$ eine Folge in N mit $u_k \rightharpoonup \tilde{u}$ in $H_0^1(\Omega)$. Wegen $p+1 < 2^*$ ist die stetige Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ sogar kompakt. Es folgt die starke Konvergenz $u_k \to \tilde{u}$ in $L^{p+1}(\Omega)$ für eine Teilfolge und somit

$$1 = \|u_k\|_{p+1} \longrightarrow \|\tilde{u}\|_{p+1},$$

also $\tilde{u} \in N$.

Es sind alle Voraussetzungen der direkten Methode erfüllt und wir erhalten mit der schwachen Abgeschlossenheit von N die Existenz eines Minimierers $u^* \in N$ mit Minimalitätseigenschaft

$$A(u^*) = \inf\{A(v) | v \in N\}.$$

Ohne Einschränkung gelte $u^* \geq 0$ (sonst ersetze u^* durch $|u^*|$). Damit sind bereits Zulässigkeit ($L2$) und Minimalitätseigenschaft ($L3$) aus Satz 2.1 erfüllt und es bleibt nur noch ($L1$), also die Surjektivität von $D\phi(u^*) : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ zu zeigen.
Sei dazu $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist $\varphi_r := ru^* \in H_0^1(\Omega)$ und mit $u^* \in N$ erhalten wir

$$\langle D\phi(u^*), \varphi_r\rangle = \int_\Omega |u^*|^{p-1}u^*\varphi_r = r\int_\Omega |u^*|^{p+1} = r,$$

die Surjektivität von $D\phi(u^*)$.
Es sind alle Voraussetzungen von Satz 2.1 erfüllt, d.h. es existiert ein Lagrange-Multiplikator $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\langle DA(u^*), \varphi\rangle = \mu\langle D\phi(u^*), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Die Ableitungsvorschriften (2.4), (2.5) liefern

$$2\int_\Omega (\nabla u^* \cdot \nabla\varphi - \lambda u^*\varphi) = \mu \int_\Omega |u^*|^p\varphi \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.7}$$

Durch Einsetzen von $\varphi = u^*$ erhalten wir $\mu = 2A(u^*)$ und somit aus (2.6) unter Berücksichtigung von $u^* \in N$

$$\mu \geq 2\min\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}, 1\right\} \|u^*\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0.$$

Die Relation (2.7) ist gerade die schwache Formulierung von

$$-\Delta u^* - \lambda u^* = \frac{\mu}{2}|u^*|^p \quad \text{in} \quad \Omega. \tag{2.8}$$

Nun erhalten wir mit einem Skalierungsargument wie folgt eine Lösung:
Wir setzen

$$u := \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} u^*.$$

Dann ist $u \in H_0^1(\Omega)$ und es gilt mit (2.8)

$$-\Delta u - \lambda u = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} (-\Delta u^* - \lambda u^*) = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} |u^*|^p = u^p \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Es bleibt nur noch die Positivität von u in Ω zu zeigen.
Wegen $u^* \geq 0$ und $\mu > 0$ ist $-\Delta u = \lambda u + u^p \geq 0$ in Ω. Weiter kann wegen $u^* \in N$ die Funktion u nicht identisch Null sein.
Wir betrachten nun die Funktion $w := -u \in H_0^1(\Omega)$. Nach den obigen Überlegungen ist $w \neq 0$ eine in Ω subharmonische Funktion. Nach dem starken Maximumprinzip für subharmonische Funktionen gilt dann $w < 0$ in Ω und somit $u > 0$ in Ω.
Damit löst u das Problem (2.1) und der Satz ist bewiesen. □

Es sei hier darauf hingewiesen, dass wir mit Standardmethoden ausgekommen sind, um eine Lösung von (2.1) zu konstruieren. Wir wollen an dieser Stelle noch einmal kurz unser Vorgehen zusammenfassen.

Zusammenfassung. Zunächst haben wir mit der direkten Methode eine Lösung zum Minimierungsproblem der Form

$$\text{Finde } u^* \in N = \{\phi = 0\} \text{ mit } A(u^*) = \inf\{A(v) | v \in N\}$$

gefunden. Wichtig dabei war die schwache Abgeschlossenheit von N, damit der schwache Grenzwert einer Minimalfolge wieder in der Nebenbedingungsmenge liegt. Mit dem Konzept der Lagrange-Multiplikatoren erhielten wir dann eine Euler-Lagrange Gleichung für u^*. Anschließend war es uns möglich, mit einem Skalierungsargument und der Anwendung des starken Maximumprinzips für subharmonische Funktionen auf eine Lösung unseres Ausgangsproblems (2.1) zu schließen.

3 Der kritische Fall: Existenz von Lösungen

Nachdem wir die Existenz im subkritischen Fall geklärt haben, beschäftigen wir uns nun mit dem kritischen Fall:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p + \lambda u & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 3$ unter der Voraussetzung $p + 1 = 2^*$. Es stellt sich natürlich die Frage, was hier im Beweis des Existenzsatzes für den subkritischen Fall schiefgehen würde. Unser zu minimierendes Funktional

$$A : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R},\ A(u) := \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2$$

bleibt unverändert, demnach gilt auch weiter Beschränktheit, Koerzivität und schwache Unterhalbstetigkeit. Unser Ziel ist die Minimierung von A auf der Sphäre

$$N := \{u \in H_0^1(\Omega) | \|u\|_{2^*} = 1\}.$$

Wir erinnern uns, dass wir im subkritischen Fall für die schwache Abgeschlossenheit von N die Kompaktheit der Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$ verwendet haben. Die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ ist kompakt für $q < 2^*$, aber nicht kompakt für $q = 2^*$. Dementsprechend liefert uns die direkte Methode zwar einen Minimierer von A, aber wir können dann nicht schließen, dass dieser auch in N ist.

3.1 Beste Sobolevkonstante für $H_0^1 \hookrightarrow L^{2^*}$

Wir definieren den Optimalwert des Minimierungsproblems

$$S_\lambda := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\} \tag{3.2}$$

und wollen diesen mit der *besten* Einbettungskonstante für die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$

$$S := S_0 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*} = 1}} \|\nabla u\|_2^2 \tag{3.3}$$

in Beziehung setzen. An dieser Stelle halten wir aber zunächst wichtige Eigenschaften von S fest.

Bemerkung 3.1. *Sei S die in* (3.3) *definierte beste Einbettungskonstante für die Einbettung $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) S ist unabhängig vom Gebiet Ω.

(ii) Auf beschränkten Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wird S nicht angenommen.

(iii) Im Ganzraum $\Omega = \mathbb{R}^n$ wird S durch eine Funktion $u(x) := C\left(1+|x|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$ und durch die skalierten Funktionen $u_\varepsilon(x) := C_\varepsilon\left(\varepsilon+|x|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$ angenommen, wobei C und C_ε Normierungskonstanten sind. Insbesondere erfüllt die Funktion $u_s(x) := \left(1+|x|^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$ die Beziehung

$$\frac{\|\nabla u_s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_s\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} = S.$$

Beweis. (i) Zunächst ist festzustellen, dass

$$S = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} Q(u) \quad \text{mit} \quad Q(u) := \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2}. \tag{3.4}$$

Wir zeigen nun die Skalierungsinvarianz von Q, also

$$Q\left(u_r\right) = Q(u) \ \text{ für } \ u_r(x) := u(rx), \ r > 0. \tag{3.5}$$

Es gilt nach der Kettenregel $\nabla u_r(x) = r\nabla u(rx)$ und wir erhalten mit dem Transformationssatz für den Zähler

$$\|\nabla u_r\|_2^2 = r^2 \int_\Omega |\nabla u(rx)|^2 \, dx = r^2 r^{-n} \int_\Omega |\nabla u(y)|^2 \, dy = r^{2-n}\|\nabla u\|_2^2. \tag{3.6}$$

Wir nutzen wieder den Transformationssatz und finden

$$\|u_r\|_{2^*}^{2^*} = \int_\Omega |u(rx)|^{2^*} \, dx = r^{-n} \int_\Omega |u(y)|^{2^*} \, dy = r^{-n}\|u\|_{2^*}^{2^*}.$$

Damit ergibt sich für den Nenner

$$\|u_r\|_{2^*}^2 = r^{-n\cdot\frac{2}{2^*}}\|u\|_{2^*}^2 = r^{-n\cdot\frac{2(n-2)}{2n}}\|u\|_{2^*}^2 = r^{2-n}\|u\|_{2^*}^2. \tag{3.7}$$

Schließlich erhalten wir aus (3.6) und (3.7) die Skalierungsinvarianz (3.5). Nun wollen wir mit der so erhaltenen Skalierungsinvarianz auf die Behauptung schließen. Wir folgen dabei dem Vorgehen in [Str08, p. 42].
Zur Verdeutlichung des Grundraums benutzen wir die Notation $S(X)$ für S aus (3.4). Dabei sei auch $X = \mathbb{R}^n$ zugelassen.
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Ohne Einschränkung nehmen wir $0 \in \Omega$ an. Unser Ziel ist zu zeigen, dass $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n)$. Wir betrachten den Raum $C_c^\infty(\Omega)$ als Teilmenge des Raums $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch Fortsetzung mit Null außerhalb von Ω und analog $H_0^1(\Omega)$ als Teilmenge des Raums $H_0^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt offenbar

$$S(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \geq \inf_{u \in H_0^1(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} = S(\mathbb{R}^n).$$

Sei nun $(u_k)_k$ eine Minimalfoge zu $S(\mathbb{R}^n)$ auf dem Ganzraum. Es gelte also

$$u_k \in H_0^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.8a}$$

$$\frac{\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_k\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} \longrightarrow S(\mathbb{R}^n). \tag{3.8b}$$

Zusätzlich zu (3.8a) können wir aufgrund von Dichtheit $u_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ annehmen. Durch Skalierung mit hinreichend kleinem $r > 0$ erhalten wir dann eine Folge $\tilde{u}_k \in C_c^\infty(\Omega)$ mit

$$\frac{\|\nabla \tilde{u}_k\|_2^2}{\|\tilde{u}_k\|_{2^*}^2} = \frac{\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_k\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}}.$$

Dies liefert zusammen mit (3.8b)

$$S(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} \leq \liminf \frac{\|\nabla \tilde{u}_k\|_2^2}{\|\tilde{u}_k\|_{2^*}^2} = \liminf \frac{\|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_k\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} = S(\mathbb{R}^n).$$

Die andere Ungleichung ist bereits gezeigt und es folgt $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^n)$. Damit ist die Aussage (i) bewiesen.

(ii) (Beweisskizze) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass S durch eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}$ angenommen wird. Wir umschließen Ω mit einer Kugel $B := B_R(x_0) \supset \Omega$ mit geeignetem $R > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Ohne Einschränkung sei $u \geq 0$, sonst ersetzen wir u durch seinen Betrag $|u|$. Die triviale Fortsetzung von u auf die Kugel $u_B \in H_0^1(B)\setminus\{0\}$ realisiert S auf B und löst somit

$$-\Delta u_B = \mu u_B^p$$

mit einem Lagrange-Multiplikator $\mu > 0$. Wir werden aber später sehen, dass dies nicht möglich ist (Stichwort: Pohozaev-Identität). Es folgt die Behauptung (ii).

(iii) Den Beweis werden wir in dieser Arbeit nicht führen, sondern verweisen auf [Tal76] und [Lie83].

□

3.2 Existenz unter der Voraussetzung $S_\lambda < S$

Wir gehen nun der Frage nach, unter welchen Bedingungen an λ das Infimum aus (3.2) angenommen wird. Wenn S_λ angenommen wird, können wir wie im subkritischen Fall auf eine Lösung schließen. Das folgende Lemma zeigt Folgendes: Eine hinreichende Bedingung dafür, dass es eine Funktion gibt, welche S_λ realisiert, ist die Relation $S_\lambda < S$ zusammen mit $\lambda < \lambda_1$. Als Referenz seien [BL83] und [Str08, p. 174] angegeben.

Lemma 3.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet und sei $\lambda < \lambda_1$. Angenommen, es gilt*

$$S_\lambda < S. \tag{3.9}$$

Dann existiert ein $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{2^*} = 1$ und

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 - \lambda \int_\Omega |u|^2 = S_\lambda. \tag{3.10}$$

Beweis. <u>*Schritt 1*</u>: *Beschaffung eines Kandidaten.* Sei $\lambda < \lambda_1$ mit $S_\lambda < S$. Wir betrachten eine Minimalfolge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(\Omega)$ zu S_λ. Es gelte also

$$\|u_k\|_{2^*} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.11a}$$

$$\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \lambda \int_\Omega |u_k|^2 \longrightarrow S_\lambda. \tag{3.11b}$$

Wie im subkritischen Fall erhalten wir die Abschätzung

$$\int_\Omega \left(|\nabla u_k|^2 - \lambda\, |u_k|^2\right) \geq \min\left\{1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}, 1\right\} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 =: M \int_\Omega |\nabla u_k|^2 .$$

Wegen $\lambda < \lambda_1$ ist $M > 0$ und wir erhalten die Beschränktheit von $(u_k)_k$ in $H_0^1(\Omega)$. Da $H_0^1(\Omega)$ reflexiv ist, existiert eine schwach konvergente Teilfolge und ein Limes $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$:

$$u_k \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{schwach in } \; H_0^1(\Omega). \tag{3.12}$$

Nach dem Kompaktheitssatz von Rellich-Kondrachov können wir weiter annehmen, dass

$$u_k \longrightarrow \bar{u} \quad \text{stark in } \; L^2(\Omega), \tag{3.13}$$

$$u_k \longrightarrow \bar{u} \quad \text{punktweise fast überall in } \; \Omega. \tag{3.14}$$

Wir wollen nun $\bar{u} \neq 0$ zeigen. Dazu nutzen wir nacheinander (3.13), die Definition von S unter Berücksichtigung von (3.11a), und (3.11b):

$$\lambda \int_\Omega |\bar{u}|^2 \longleftarrow \lambda \int_\Omega |u_k|^2 \geq \lambda \int_\Omega |u_k|^2 - \int_\Omega |\nabla u_k|^2 + S \longrightarrow -S_\lambda + S.$$

Mit der Relation (3.9) erhalten wir daraus

$$\lambda \int_\Omega |\bar{u}|^2 \geq S - S_\lambda > 0$$

und somit $\bar{u} \neq 0$. Damit ist die Setzung

$$u := \|\bar{u}\|_{2^*}^{-1} \bar{u}$$

wohldefiniert und wir werden zeigen, dass dieses u alle gewünschten Eigenschaften besitzt.
<u>*Schritt 2*</u>: *Nachprüfen der Eigenschaften.* Wegen $\bar{u} \in H_0^1(\Omega)$ ist auch $u \in H_0^1(\Omega)$ und es gilt offenbar $\|u\|_{2^*} = 1$. Damit bleibt noch (3.10) zu beweisen. Wir bemerken, dass es aufgrund der Definitionen von S_λ und u genügt zu zeigen, dass

$$\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 - \lambda \int_\Omega |\bar{u}|^2 \le S_\lambda \|\bar{u}\|_{2^*}^2. \tag{3.15}$$

Wir verwenden nacheinander die Definition von S (in der Variante (3.4)), Einschieben einer komplizierten Null und die Konvergenzaussagen (3.11b), (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned} S\|u_k - \bar{u}\|_{2^*}^2 &\le \|\nabla (u_k - \bar{u})\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla (u_k - \bar{u})|^2 \\ &= \left(\int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 - 2 \int_\Omega \nabla u_k \cdot \nabla \bar{u} \right) + \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 - \lambda \int_\Omega |u_k|^2 \right) + \lambda \int_\Omega |u_k|^2 \\ &\longrightarrow - \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 + S_\lambda + \lambda \int_\Omega |\bar{u}|^2. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Angenommen, es gilt

$$\|u_k - \bar{u}\|_{2^*}^{2^*} \longrightarrow 1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2^*}. \tag{3.17}$$

Dann gilt insbesondere $0 < \|\bar{u}\|_{2^*} \le 1$ und wir erhalten aus $2^* \ge 2$, der Nichtnegativität von S und der Relation (3.9)

$$S\|u_k - \bar{u}\|_{2^*}^2 \to S\left(1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2^*}\right)^{\frac{2}{2^*}} \ge S\left(1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2^*}\right) \ge S\left(1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2}\right) \ge S_\lambda \left(1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2}\right).$$

Zusammen mit (3.16) finden wir schließlich

$$S_\lambda \left(1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^2\right) \le - \int_\Omega |\nabla \bar{u}|^2 + S_\lambda + \lambda \int_\Omega |\bar{u}|^2.$$

Dies entspricht genau (3.15), was zu zeigen war.
Es ist also nur noch unsere Annahme (3.17) nachzuprüfen. Wir verwenden (3.11a) und können mit dem Hauptsatz der Analysis schließen:

$$\begin{aligned} \|u_k - \bar{u}\|_{2^*}^{2^*} &= \|u_k - \bar{u}\|_{2^*}^{2^*} - \|u_k\|_{2^*}^{2^*} + 1 \\ &= \int_\Omega \left(|u_k - \bar{u}|^{2^*} - |u_k|^{2^*}\right) dx + 1 \\ &= 1 - \int_\Omega \int_0^1 \frac{d}{ds} |(s-1)\bar{u} + u_k|^{2^*} ds\, dx \end{aligned}$$

$$= 1 - 2^* \int_\Omega \int_0^1 ((s-1)\bar{u} + u_k)|(s-1)\bar{u} + u_k|^{2^*-2}\bar{u}\; ds\; dx$$

$$\longrightarrow 1 - 2^* \int_\Omega \int_0^1 s\bar{u}|s\bar{u}|^{2^*-2}\bar{u}\; ds\; dx = 1 - \int_\Omega |\bar{u}|^{2^*} dx = 1 - \|\bar{u}\|_{2^*}^{2^*}.$$

Die Konvergenz folgt dabei aus dem Konvergenzsatz von Vitali mit der punktweisen (fast überall) Konvergenz (3.14) und der gleichgradigen Integrierbarkeit der Funktionenfamilie $\big(|(s-1)\bar{u} + u_k|^{2^*-1}\bar{u}\big)$ in $s \in [0,1]$. Somit haben wir (3.17) gezeigt und damit den Beweis nach unseren obigen Überlegungen vervollständigt. □

Für unser Funktional A und die Nebenbedingung N haben wir mit obigem Lemma eine Funktion gefunden, die $S_\lambda = \inf\{A(v)|v \in N\}$ realisiert, haben also einen Minimierer von A in N gefunden. Nun stellt sich natürlich noch die Frage, ob die geforderte Bedingung aus obigem Lemma überhaupt erfüllt werden kann, also ob es $\lambda < \lambda_1$ mit $S_\lambda < S$ gibt. Es lohnt sich, noch einmal kurz über die beiden Bedingungen zu diskutieren.
Die Bedingung $\lambda < \lambda_1$ ist nicht sehr erstaunlich, da wir diese auch im subkritischen Fall gefordert haben. Wenn wir uns jedoch die Definitionen (3.2), (3.3) von S_λ und S anschauen, so fällt auf, dass für $\lambda \leq 0$ die zweite Bedingung $S_\lambda < S$ nicht erfüllt sein kann. Wir bekommen also bestenfalls das Intervall $(0, \lambda_1)$ für die möglichen Werte für λ, welche beide Bedingungen erfüllen. Wir bemerken weiter, dass die Bedingung $S_\lambda < S$ gleichbedeutend ist zur Frage, ob der Term $\lambda\|u\|_2^2$ zum Infimum in (3.2) beiträgt.
Bevor wir die Bedingung $S_\lambda < S$ weiter untersuchen, wollen wir festhalten, dass wir mit den in Lemma 3.2 gestellten Voraussetzungen die Existenz einer schwachen Lösung unserer PDE (3.1) analog zum subkritischen Fall zeigen können.

Satz 3.3 (Existenzsatz im kritischen Fall bei $S_\lambda < S$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet und sei $\lambda < \lambda_1$. Angenommen, es gilt*

$$S_\lambda < S.$$

Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zum kritischen Problem (3.1)*.*

Beweis. Sei $\lambda < \lambda_1$ mit $S_\lambda < S$. Dann gibt es nach Lemma 3.2 ein $u^* \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\|\nabla u^*\|_2^2 - \lambda\|u^*\|_2^2 = S_\lambda\,, \quad \|u^*\|_{2^*} = 1. \tag{3.18}$$

Ohne Einschränkung sei $u^* \geq 0$ (sonst ersetze u^* durch $|u^*|$). Da u^* ein Minimierer von A in N ist, existiert ein Lagrange-Multiplikator $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$-\Delta u^* - \lambda u^* = \mu|u^*|^p \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Aus (3.18) erhalten wir, dass $\mu = S_\lambda$. Wegen $S_\lambda < S$ und $\lambda < \lambda_1$ ist $\lambda \in (0, \lambda_1)$ und es folgt $S_\lambda > 0$. Wir setzen

$$u := S_\lambda^{\frac{1}{p-1}} u^*$$

und zeigen, dass dieses u das Problem (3.1) löst.
Zunächst ist festzustellen, dass $u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$. Weiter gilt

$$-\Delta u - \lambda u = S_\lambda^{\frac{1}{p-1}}(-\Delta u^* - \lambda u^*) = S_\lambda^{\frac{1}{p-1}} S_\lambda |u^*|^p = u^p \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Wegen $u^* \geq 0$ und $S_\lambda > 0$ ist $-\Delta u = \lambda u + u^p \geq 0$ in Ω. Also folgt mit dem starken Maximumprinzip $u > 0$ in Ω. Damit löst u das Problem (3.1). □

3.3 Die Relation $S_\lambda < S$

Wir wollen nun prüfen, für welche λ die Relation $S_\lambda < S$ erfüllt ist. Sobald es nämlich $\lambda < \lambda_1$ mit $S_\lambda < S$ gibt, haben wir mit Satz 3.3 eine Lösung unserer PDE (3.1) gefunden. Wie wir bereits festgestellt haben, gilt $S_\lambda \geq S$ für $\lambda \leq 0$. Folglich können nur positive λ die Relation $S_\lambda < S$ erfüllen. Wir behandeln nun die Raumdimensionen $n > 3$ und $n = 3$ getrennt voneinander.

3.3.1 Raumdimensionen $n > 3$

Wir können explizit eine Funktionenfamilie $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}$ konstruieren, so dass

$$Q_\varepsilon := \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} < S \tag{3.19}$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Wir müssen dabei sogar nur Positivität an λ voraussetzen. Aus (3.19) erhalten wir dann

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_{2^*}=1}} \left\{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2\right\} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2}{\|u\|_{2^*}^2} < S.$$

Als Funktionenfamilie wählen wir für $\varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon(x) := \phi(x) u_\varepsilon^*(x) \quad \text{mit} \quad u_\varepsilon^*(x) := (\varepsilon + |x|^2)^{\frac{2-n}{2}}$$

und einer festen Abschneidefunktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung von 0.

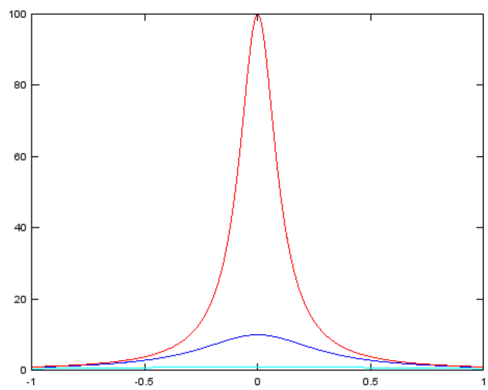

Abb. 4: Funktionenfamilie $u_\varepsilon^*(|x|)$ für Dimension $n = 4$ und Parameter $\varepsilon = 1$ (cyan), $\varepsilon = 0.1$ (blau), $\varepsilon = 0.01$ (rot).

Die Funktionen u_ε^* haben wir an früherer Stelle schon einmal gesehen, denn diese (nach Normierung in L^{2^*}) realisieren S im Ganzraum, vgl. Bemerkung 3.1 (iii). Als Vorbereitung für den Beweis von (3.19) halten wir folgende Skalierungseigenschaft fest: Für $m > 0$ erhalten wir mit dem Transformationssatz

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^m}\, dx = \varepsilon^{-m} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}|^2)^m}\, dx = \varepsilon^{-m+\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^m}\, dx. \tag{3.20}$$

Nun sind alle Vorbereitungen getan und wir können folgendes Lemma beweisen.

Lemma 3.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$ ein beschränktes Gebiet. Dann ist für alle $\lambda > 0$ die Relation $S_\lambda < S$ erfüllt.*

Beweis. Sei $\lambda > 0$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $0 \in \Omega$. Wir betrachten für $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$u_\varepsilon(x) := \frac{\phi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{\frac{n-2}{2}}}$$

mit einer festen Abschneidefunktion $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung $B_\rho(0)$, $\rho > 0$. Unser Ziel ist zu zeigen, dass die Relation (3.19) für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gilt. Diese Relation impliziert nach unseren Vorüberlegungen die Behauptung des Lemmas.
Wir berechnen nun einzeln die in Q_ε vorkommenden Normen. Dabei sei angemerkt, dass sich alle in diesem Beweis vorkommenden Landau-Symbole auf das Verhalten für $\varepsilon \to 0$ beziehen.
<u>*Auswertung von* $\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2$:</u> Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 &\overset{(a)}{=} \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2 \overset{(b)}{=} \int\limits_\Omega \left| \frac{\nabla\phi(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}}} + (2-n)\frac{x\phi(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \right|^2 dx \\
&\overset{(c)}{=} \int\limits_\Omega (2-n)^2 \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\, dx + \mathcal{O}(1) \\
&\overset{(d)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (2-n)^2 \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\, dx + \mathcal{O}(1) \\
&\overset{(e)}{=} (2-n)^2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}\, dx + \mathcal{O}(1) \\
&= C_1 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

mit der Konstanten

$$C_1 := (2-n)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^n}\, dx.$$

Dabei haben wir verwendet:

(a) Definition der Norm

(b) Auswerten des Gradienten

(c) $\nabla\phi \equiv 0$ in $B_\rho(0)$

(d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx$ gleichmäßig beschränkt in ε

(e) Transformationssatz, analog zu (3.20)

Wir bemerken, dass für $u_s(x) := (1+|x|^2)^{\frac{2-n}{2}}$ gilt:

$$C_1 = \|\nabla u_s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

<u>*Auswertung von $\|u_\varepsilon\|^2_{2^*}$*</u>: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|^{2^*}_{2^*} \overset{(a)}{=} \int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*} &\overset{(b)}{=} \int_\Omega \frac{\phi^{2^*}(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx \\
&\overset{(c)}{=} \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx + \int_\Omega \frac{\phi^{2^*}(x)-1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx \\
&\overset{(d)}{=} \int_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx + \mathcal{O}(1) \\
&\overset{(e)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx + \mathcal{O}(1) \\
&\overset{(f)}{=} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n}\,dx + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet:

(a) Definition der Norm

(b) Auswerten des Integranden

(c) Aufspalten in zwei Integrale

(d) $\phi \equiv 1$ in $B_\rho(0)$

(e) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^n}\,dx$ gleichmäßig beschränkt in ε

(f) (3.20) mit $m = n$

Daraus erhalten wir

$$\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2 = C_2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)$$

mit der Konstanten

$$C_2 := \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^n} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} = \|u_s\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}^2.$$

<u>*Auswertung von $\|u_\varepsilon\|_2^2$ für $n = 4$*</u>: Wir nutzen $\phi \equiv 1$ in $B_\rho(0)$ und erhalten

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int\limits_\Omega |u_\varepsilon|^2 = \int\limits_\Omega \frac{\phi^2(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx = \int\limits_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx + \mathcal{O}(1). \tag{3.21}$$

Zu Ω finden wir Radien $r, R > 0$, so dass

$$\int\limits_{B_r(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx \leq \int\limits_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx \leq \int\limits_{B_R(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx. \tag{3.22}$$

Für Kugeln $B_K(0)$ mit Radius $K > 0$ haben wir mittels Zwiebelintegration

$$\int\limits_{B_K(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx = \int\limits_0^K \frac{|\partial B_1| k^3}{(\varepsilon+k^2)^2} \, dk = \frac{|\partial B_1|}{2} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(1). \tag{3.23}$$

Unter Berücksichtigung von

$$\int\limits_{B_R(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx = \int\limits_{B_r(0)} \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx + \mathcal{O}(1)$$

erhalten wir aus den Beziehungen (3.21), (3.22) und (3.23)

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = \int\limits_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^2} \, dx + \mathcal{O}(1) = \frac{|\partial B_1|}{2} |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(1) = C_3 |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(1)$$

mit der Konstanten

$$C_3 := \frac{|\partial B_1|}{2}.$$

<u>*Auswertung von $\|u_\varepsilon\|_2^2$ für $n > 4$*</u>: Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u_\varepsilon\|_2^2 \overset{(a)}{=} \int\limits_\Omega |u_\varepsilon|^2 \overset{(b)}{=} & \int\limits_\Omega \frac{\phi^2(x)}{(\varepsilon+|x|^2)^{n-2}} \, dx \\
\overset{(c)}{=} & \int\limits_\Omega \frac{1}{(\varepsilon+|x|^2)^{n-2}} \, dx + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(d)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{n-2}}\, dx + \mathcal{O}(1) \\
&\overset{(e)}{=} \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{n-2}}\, dx + \mathcal{O}(1) \\
&= C_4 \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} + \mathcal{O}(1)
\end{aligned}
$$

mit der Konstanten

$$
C_4 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{n-2}}\, dx.
$$

Dabei haben wir verwendet:

(a) Definition der Norm

(b) Auswerten des Integranden

(c) $\phi \equiv 1$ in $B_\rho(0)$

(d) $n - 2 > 2$ und $\int\limits_{\Omega} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^s}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^s}\, dx + \mathcal{O}(1)$ für alle $s > 2$

(e) (3.20) mit $m = n - 2$

<u>*Ergebnis für Q_ε*</u>: Wir setzen alle Ausdrücke in Q_ε ein und erhalten für $n = 4$

$$
Q_\varepsilon = \frac{\left(C_1 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)\right) - \lambda \left(C_3 |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(1)\right)}{C_2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)} = \frac{C_1}{C_2} - \lambda \frac{C_3}{C_2} \varepsilon |\log \varepsilon| + \mathcal{O}(\varepsilon),
$$

und für $n > 4$

$$
Q_\varepsilon = \frac{\left(C_1 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)\right) - \lambda \left(C_4 \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} + \mathcal{O}(1)\right)}{C_2 \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} + \mathcal{O}(1)} = \frac{C_1}{C_2} - \lambda \frac{C_4}{C_2} \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}).
$$

Aus der Positivität der Konstanten C_i und $\lambda > 0$ folgt für alle $n > 3$ und für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ mit Bemerkung 3.1 (iii) die Beziehung

$$
Q_\varepsilon < \frac{C_1}{C_2} = \frac{\|\nabla u_s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_s\|^2_{L^{2^*}(\mathbb{R}^n)}} = S
$$

und somit $S_\lambda < S$. □

Somit haben wir für alle $\lambda > 0$ die Beziehung $S_\lambda < S$ zeigen können. Wie wir uns vorher überlegt haben, bedeutet dies, dass wir für $0 < \lambda < \lambda_1$ eine schwache Lösung von (3.1) gefunden haben.

Satz 3.5 (Existenzsatz im kritischen Fall für Raumdimensionen $n > 3$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n > 3$ ein beschränktes Gebiet und sei $\lambda \in (0, \lambda_1)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H^1_0(\Omega)$ zum kritischen Problem* (3.1)*.*

Beweis. Kombination von Satz 3.3 und Lemma 3.4. □

3.3.2 Kugeln in drei Dimensionen

In drei Dimensionen ist $2^* = \frac{2n}{n-2} = 6$ und $p = 2^* - 1 = 5$, so dass die zu lösende PDE die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^5 + \lambda u & \text{in } \Omega \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} . \tag{3.24}$$

Wir wollen ein Existenzresultat für die Einheitskugel $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ herleiten. Anschließend geben wir eine Verallgemeinerung dieses Resultats für allgemeine Kugeln an.
Wegen $2^* = 6$ ergibt sich aus den Definitionen (3.2), (3.3)

$$S_\lambda = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_6 = 1}} \left\{ \|\nabla u\|_2^2 - \lambda \|u\|_2^2 \right\}$$

und

$$S = S_0 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ \|u\|_6 = 1}} \|\nabla u\|_2^2.$$

Wir werden die Relation $S_\lambda < S$ nur für $\lambda > \frac{\lambda_1}{4}$ zeigen können. Folglich gilt für $0 < \lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$ entweder die Gleichheit $S_\lambda = S$, oder es existiert ein alternativen Beweis. Letzteres widerspricht einem Nichtexistenzresultat für $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$, siehe Kapitel 4. Da die Vorgehensweise nun analog zum Beweis von Lemma 3.4 verläuft, werden wir hier nur skizzenhaft vorgehen.

Lemma 3.6. *Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist für alle $\lambda > \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$ die Relation $S_\lambda < S$ erfüllt.*

Beweis (Skizze). Sei $\lambda > \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$. Wie in Lemma 3.4 betrachten wir zu $\varepsilon > 0$ die Funktion

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(r) = \frac{\phi(r)}{(\varepsilon + r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r = |x|$$

für eine feste Funktion $\phi \in C^\infty([0,1])$ mit den Eigenschaften

$$\phi(0) = 1, \ \phi(1) = 0, \ \phi'(0) = 0. \tag{3.25}$$

Wie im Fall $n > 3$ zeigen wir wieder

$$Q_\varepsilon := \frac{\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 - \lambda \|u_\varepsilon\|_2^2}{\|u_\varepsilon\|_{2^*}^2} < S$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Da nun ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.4 die Normen ausgewertet werden, geben wir hier nur die Ergebnisse an. Es ergibt sich

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_2^2 = \frac{C_1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + |\partial B_1| \int_0^1 |\phi'(r)|^2 \, dr + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

$$\|u_\varepsilon\|_6^2 = \frac{C_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}),$$

$$\|u_\varepsilon\|_2^2 = |\partial B_1| \int_0^1 \phi^2(r)\ dr + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Dabei beziehen sich wieder alle in diesem Beweis vorkommenden Landau-Symbole auf das Verhalten für $\varepsilon \to 0$. Die Konstanten sind die Folgenden:

$$C_1 := 3|\partial B_1| \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^3}\ dr,$$

$$C_2 := \left(|\partial B_1| \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^3}\ dr \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Wir bemerken, dass für $u_s(x) := (1+|x|^2)^{-\frac{1}{2}}$ mittels Zwiebelintegration gilt:

$$\|\nabla u_s\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 = |\partial B_1| \int_0^\infty \frac{r^4}{(1+r^2)^3}\ dr = C_1, \tag{3.26}$$

$$\|u_s\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}^2 = C_2.$$

Dabei folgt das zweite Gleichheitszeichen in (3.26) aus den exakten Werten der Integrale

$$\int_0^\infty \frac{r^4}{(1+r^2)^3}\ dr = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r^2)^3}\ dr = \frac{\pi}{16}.$$

Wir erhalten insgesamt für Q_ε mit Bemerkung 3.1 (iii):

$$Q_\varepsilon = S + \frac{|\partial B_1|}{C_2} \left(\int_0^1 |\phi'(r)|^2\ dr - \lambda \int_0^1 \phi^2(r)\ dr \right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Eine zulässige Wahl für ϕ (Bedingung (3.25) und Glattheit sind erfüllt) ist offenbar $\phi(r) := \cos(\frac{\pi}{2} r)$. Mit dieser Wahl erhalten wir

$$Q_\varepsilon = S + \frac{|\partial B_1|}{2C_2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \lambda \right) \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Da die Konstante $C_2 > 0$ und nach Voraussetzung $\frac{\pi^2}{4} - \lambda < 0$ ist, erhalten wir für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein die Relation $Q_\varepsilon < S$ und damit die Behauptung. □

Somit haben wir für alle $\lambda > \frac{\lambda_1}{4}$ die Beziehung $S_\lambda < S$ zeigen können. Wie wir uns vorher überlegt haben, bedeutet dies wieder, dass wir für $\frac{\lambda_1}{4} < \lambda < \lambda_1$ eine schwache Lösung von (3.1) gefunden haben.

Satz 3.7 (Existenzsatz im kritischen Fall für die Einheitskugel in Dimension $n = 3$)**.** *Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und sei $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (3.24).*

Beweis. Kombination von Satz 3.3 und Lemma 3.6. □

Damit ist für die dreidimensionale Einheitskugel für geeignete λ eine Lösung unserer PDE (3.24) gefunden. Wir wollen an dieser Stelle eine Verallgemeinerung des Existenzssatzes für beliebige Kugeln angeben.

Bemerkung 3.8. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugel und sei $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$. Dann existiert eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (3.24).*

4 Nichtexistenzresultate

Nachdem wir in den vorherigen Kapiteln hinreichende Bedingungen an λ für die Existenz von Lösungen von (0.1) angegeben haben, wollen wir nun zeigen, dass diese im Allgemeinen auch notwendig sind. Wir geben an dieser Stelle noch einmal die in Abschnitt 2 und 3 erhaltenen Bedingungen an λ an:

- subkritischer Fall: $\lambda \in (-\infty, \lambda_1)$
- kritischer Fall in Dimensionen $n > 3$: $\lambda \in (0, \lambda_1)$
- kritischer Fall in Dimension $n = 3$ für Kugeln: $\lambda \in \left(\frac{\lambda_1}{4}, \lambda_1\right)$

In allen Fällen verlangen wir die Relation $\lambda < \lambda_1$ und es ist leicht festzustellen, dass diese für die Existenz von Lösungen auch notwendig ist.

Satz 4.1 (Nichtexistenz für $\lambda \geq \lambda_1$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes Gebiet und sei $2 < p+1 \leq 2^*$. Dann existiert für $\lambda \geq \lambda_1$ keine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von* (0.1)*.*

Beweis. Angenommen (0.1) besitzt eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$. Sei $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ eine Eigenfunktion von $-\Delta$ zum Eigenwert λ_1 mit $\phi_1 > 0$ in Ω (ϕ_1 kann positiv gewählt werden nach dem Krein-Rutman Theorem). Wir verwenden nacheinander die Definition von ϕ_1, die Lösungseigenschaft von u und Positivität von u, ϕ_1:

$$\lambda_1 \int\limits_\Omega u\phi_1 = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi_1 = \int\limits_\Omega u^p \phi_1 + \lambda \int\limits_\Omega u\phi_1 > \lambda \int\limits_\Omega u\phi_1.$$

Aus $u, \phi_1 > 0$ in Ω folgt nun $\lambda < \lambda_1$ und somit die Behauptung. □

Damit haben wir unseren ersten Nichtexistenzssatz bewiesen und den subkritischen Fall vollständig analysiert. Es bleiben noch Nichtexistenzresultate für den kritischen Fall zu beweisen. Diese erfordern mehr Aufwand und wir beginnen mit einem wichtigen Hilfsmittel für Nichtexistenzaussagen, der sogenannten Pohozaev-Identität.

4.1 Pohozaev-Identität und Konsequenzen

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion eines Nichtexistenzsatzes für $\lambda \leq 0$. Wir haben nämlich Positivität an λ sowohl im Fall $n > 3$ als auch im Fall $n = 3$ gefordert (Eigenwerte von $-\Delta$ sind positiv, also ist $\lambda_1 > 0$). Die Situation für die Pohozaev-Identität ist die Folgende:
Situation: Wir betrachten ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ und eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ von

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

zu stetigem $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Satz 4.2 (Pohozaev-Identität)**.** *In obiger Situation gilt die Pohozaev-Identität*

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(x)\right|^2(x\cdot\nu(x))\,dS(x)=\frac{2-n}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2\,dx+n\int\limits_{\Omega}G(u(x))\,dx.$$

Dabei sei $G(u):=\int\limits_0^u g(s)\,ds$ *und* ν *die äußere Normale an* $\partial\Omega$*.*

Beweis. Die Grundidee des Beweises ist das Testen der Gleichung (4.1) mit $x\cdot\nabla u$. Bevor wir dies tun, beweisen wir aber zunächst eine Hilfsidentität.
Schritt 1: *Hilfsidentität.* Wir behaupten, dass jedes $u\in C^2(\Omega)$ die folgende Relation erfüllt:

$$\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u)=|\nabla u|^2+x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)\quad\text{in}\quad\Omega.\tag{4.2}$$

Wir rechnen direkt nach, dass in Ω gilt:

$$\begin{aligned}\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u)&=\sum_{i=1}^n\partial_i u\sum_{j=1}^n\partial_i(x_j\partial_j u)\\&=\sum_{i=1}^n\partial_i u\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}\partial_j u+x_j\partial_i\partial_j u)\\&=\sum_{i=1}^n|\partial_i u|^2+\sum_{j=1}^n x_j\sum_{i=1}^n(\partial_i u)\partial_i\partial_j u\\&=|\nabla u|^2+\sum_{j=1}^n x_j\sum_{i=1}^n(\partial_i u)\partial_j\partial_i u\\&=|\nabla u|^2+x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right).\end{aligned}$$

Dabei wurde beim vorletzten Gleichheitszeichen der Satz von Schwarz benutzt.
Schritt 2: *Testen der Gleichung.* Für Lösungen $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ von (4.1) liefert Testen der Gleichung mit $x\cdot\nabla u$ und Ausnutzen von (4.2)

$$\begin{aligned}0&=(\Delta u+g(u))(x\cdot\nabla u)\\&=\nabla\cdot(\nabla u(x\cdot\nabla u))-\nabla u\cdot\nabla(x\cdot\nabla u)+x\cdot\nabla G(u)\\&=\nabla\cdot(\nabla u(x\cdot\nabla u))-|\nabla u|^2-x\cdot\nabla\left(\frac{|\nabla u|^2}{2}\right)+x\cdot\nabla G(u)\\&=\nabla\cdot\left(\nabla u(x\cdot\nabla u)-x\frac{|\nabla u|^2}{2}+xG(u)\right)+\frac{n-2}{2}|\nabla u|^2-nG(u)\quad\text{in }\Omega.\end{aligned}$$

Nun integrieren wir diese Relation über Ω. Wir verwenden den Satz von Gauß und berücksichtigen $u=0$ und $x\cdot\nabla u=(x\cdot\nu)\frac{\partial u}{\partial\nu}$ auf $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned}
\frac{2-n}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+n\int\limits_{\Omega}G(u) &= \int\limits_{\Omega}\nabla\cdot\left(\nabla u(x\cdot\nabla u)-x\frac{|\nabla u|^2}{2}+xG(u)\right)\\
&= \int\limits_{\partial\Omega}\left(\nabla u(x\cdot\nabla u)-x\frac{|\nabla u|^2}{2}+xG(u)\right)\cdot\nu\\
&= \int\limits_{\partial\Omega}\left(\nabla u(x\cdot\nu)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\cdot\nu-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(x|\nabla u|^2)\cdot\nu\\
&= \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2(x\cdot\nu).
\end{aligned}$$

Damit ist die Pohozaev-Identität gezeigt. □

Im obigen Beweis der Pohozaev-Identität folgten wir [Str08, pp. 171-172]. Die Pohozaev-Identität möchten wir auf Lösungen unserer PDE (3.1) anwenden. Problematisch ist die in obigem Satz geforderte Regularität an die Lösung, da unsere Existenzsätze zunächst nur eine Lösung $u\in H_0^1(\Omega)$ liefern. Die Pohozaev-Identität erfordert jedoch eine Lösung der Klasse $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$. Wir beweisen daher zunächst die Nichtexistenz von klassischen Lösungen und kümmern uns anschließend um das Regularitätsproblem.

Satz 4.3 (Nichtexistenz klassisch für $\lambda\le 0$)**.** *Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$ ein beschränktes strikt-sternförmiges Gebiet um den Ursprung, d.h. es gelte*

$$x\cdot\nu(x)>0\ \ \forall x\in\partial\Omega. \tag{4.3}$$

Dann existiert für $\lambda\le 0$ keine klassische Lösung von (3.1).

Beweis. Sei $\lambda\le 0$. Angenommen (3.1) besitzt eine klassische Lösung $u\in C^2(\overline{\Omega})$. Wir verwenden nacheinander die Pohozaev-Identität mit $g(u)=u^p+\lambda u$, partielle Integration unter Berücksichtigung von $u=0$ auf $\partial\Omega$, und die Lösungseigenschaft von u:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2(x\cdot\nu) &= \frac{2-n}{2}\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2+n\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2^*}u^{2^*}+\frac{\lambda}{2}u^2\right)\\
&= \frac{2-n}{2}\int\limits_{\Omega}(-\Delta u)\,u+n\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2^*}u^{2^*}+\frac{\lambda}{2}u^2\right)\\
&= \frac{2-n}{2}\int\limits_{\Omega}\left(u^{2^*}+\lambda u^2\right)+\frac{n-2}{2}\int\limits_{\Omega}u^{2^*}+\frac{n}{2}\lambda\int\limits_{\Omega}u^2\\
&= \lambda\int\limits_{\Omega}u^2.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir mit $\lambda \leq 0$ und Relation (4.3)

$$0 \leq \frac{1}{2} \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (x \cdot \nu) = \lambda \int\limits_{\Omega} u^2 \leq 0.$$

Folglich verschwinden beide Ausdrücke und wir können mit Relation (4.3) schließen:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega, \tag{4.4a}$$

$$\lambda \int\limits_{\Omega} u^2 = 0. \tag{4.4b}$$

Für $\lambda < 0$ erhalten wir aus (4.4b) $u \equiv 0$, im Widerspruch zur Annahme.
Für $\lambda = 0$ nutzen wir die Lösungseigenschaft von u, den Satz von Gauß und (4.4a):

$$\int\limits_{\Omega} u^p(x)\ dx = -\int\limits_{\Omega} \Delta u(x)\ dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\ dS(x) = 0.$$

Es folgt also auch in diesem Fall $u \equiv 0$, im Widerspruch zur Annahme. □

Insbesondere liefert Satz 4.3 die Nichtexistenz von klassischen Lösungen von (3.1) für Kugeln um den Ursprung, da Kugeln strikt sternförmig sind. Bezüglich des Regularitätsproblems zitieren wir den nachfolgenden Satz.

Bemerkung 4.4 (Regularität von Lösungen auf glatten Gebieten)**.** *Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ mit $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 sind schwache Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ von* (3.1) *auch klassische Lösungen $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

Auf einen Beweis wird in dieser Arbeit verzichtet, es sei aber auf [Str08, pp. 270-271] verwiesen.
Mit dieser Regularitätsaussage liefert Satz 4.3 für glatte strikt sternförmige Gebiete um den Ursprung also sogar die Nichtexistenz einer schwachen Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von (3.1).

Korollar 4.5 (Nichtexistenz für $\lambda \leq 0$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ ein beschränktes strikt-sternförmiges Gebiet um den Ursprung mit $\partial\Omega \in C^2$ und sei weiter $\lambda \leq 0$. Dann existiert keine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von* (3.1)*.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.3 und Bemerkung 4.4. □

4.2 Radialsymmetrie von Lösungen und Konsequenzen

Nachdem wir nun für Raumdimensionen $n > 3$ gezeigt haben, dass im Allgemeinen für $\lambda \notin (0, \lambda_1)$ keine Lösung von (3.1) existiert, ist noch ein Nichtexistenzresultat in drei Dimensionen für Gleichung (3.24) ausstehend. Wir werden für die dreidimensionale Einheitskugel die Nichtexistenz von Lösungen für $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$ zeigen. Dabei erhalten wir zunächst wieder nur eine Aussage über klassische Lösungen, können aber mit der Regularität von Lösungen auf glatten Gebieten auch die Existenz von schwachen Lösungen ausschließen. Das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis ist das folgende Symmetrieresultat von Gidas, Ni und Nirenberg [GNN79].

Lemma 4.6 (Radialsymmetrie von Lösungen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ eine Kugel und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Sei weiter $u \in C^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung von*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega \\ \quad u > 0 & \text{in } \Omega \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} . \tag{4.5}$$

Dann ist u radialsymmetrisch, d.h. $u(x) = \tilde{u}(|x|)$ für eine Funktion $\tilde{u} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Für einen Beweis verweisen wir auf [GNN79] und [Eva10, pp. 557-561]. Mit Hilfe von Lemma 4.6 können wir nun unser letztes Nichtexistenzresultat beweisen.

Satz 4.7 (Nichtexistenz klassisch für $\lambda \leq \lambda^*$ für die Einheitskugel)**.** *Sei $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$. Dann existiert keine klassische Lösung von* (3.24)*.*

Beweis. Wir betrachten λ mit $0 < \lambda \leq \frac{\lambda_1}{4} = \frac{\pi^2}{4}$. Wir bemerken, dass die Aussage für $\lambda \leq 0$ nach Satz 4.3 gilt. Angenommen (3.24) besitzt eine klassische Lösung $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Das Problem (3.24) ist von der Form (4.5) mit der Lipschitz-stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^5 + \lambda x$. Lemma 4.6 liefert also Radialsymmetrie von u und wir schreiben $u(x) = u(r)$, $r = |x|$. Es ist leicht nachzurechnen, dass für eine radialsymmetrische Funktion f mit $f(x) = \phi(r)$ für ein $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Laplace-Operator die folgende Gestalt annimmt:

$$(\Delta f)(x) = \phi^{''}(r) + \frac{n-1}{r}\phi^{'}(r).$$

In unserer Situation erhalten wir damit, dass $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ das Problem

$$\begin{cases} -u^{''} - \frac{2}{r}u^{'} = u^5 + \lambda u \quad \text{in} \quad (0,1) \\ u(1) = u^{'}(0) = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

löst.

<u>*Schritt 1*</u>: Wir zeigen für $\psi \in C^3([0,1])$ mit $\psi(0) = 0$ und $\psi(1) \geq 0$ die Relation

$$\int_0^1 u^2(r)\left(\lambda\psi^{'}(r) + \frac{1}{4}\psi^{'''}(r)\right) r^2\, dr \geq \frac{2}{3}\int_0^1 u^6(r)\left(r\psi(r) - r^2\psi^{'}(r)\right)\, dr. \tag{4.7}$$

Dazu zeigen wir

(*i*) $\int_0^1 \left|u^{'}\right|^2 \left(\frac{1}{2}r^2\psi^{'} - r\psi\right)\, dr \geq \int_0^1 \left(2r\psi + r^2\psi^{'}\right)\left(-\frac{1}{6}u^6 - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\, dr,$

$(ii)\ \int_0^1 \left|u'\right|^2 \left(\tfrac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr = \tfrac{1}{4}\int_0^1 u^2 r^2 \psi'''\, dr + \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\left(u^6 + \lambda u^2\right)\, dr.$

Dann folgt (4.7) durch Einsetzen von (ii) in (i) nach Umsortieren.
Zu (i): Multiplikation der Gleichung (4.6) mit $r^2\psi u'$ und Integration über das Intervall $(0,1)$ ergibt

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 r^2\psi\left(2u''u'\right)\, dr - 2\int_0^1 r\psi\left|u'\right|^2\, dr = \frac{1}{6}\int_0^1 r^2\psi\left(6u'u^5\right)\, dr + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 r^2\psi\left(2u'u\right)\, dr.$$

Partielle Integration im ersten Integral auf der linken Seite und in beiden Integralen auf der rechten Seite liefert nach Zusammenfassen

$$\int_0^1 \left|u'\right|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr - \frac{1}{2}\left|u'(1)\right|^2\psi(1) = \int_0^1 \left(2r\psi + r^2\psi'\right)\left(-\frac{1}{6}u^6 - \frac{\lambda}{2}u^2\right)\, dr.$$

Nach Voraussetzung ist $\psi(1) \geq 0$ und es folgt (i).
Zu (ii): Multiplikation der Gleichung (4.6) mit $\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)u$ und Integration über das Intervall $(0,1)$ ergibt

$$\int_0^1 \left(-u'' - \frac{2}{r}u'\right)\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)u\, dr = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\left(u^6 + \lambda u^2\right)\, dr.$$

Wir bezeichnen die linke Seite dieser Gleichung mit L und rechnen mit partieller Integration:

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2}\int_0^1 u''ur^2\psi'\, dr + \int_0^1 u''ur\psi\, dr - \int_0^1 u'ur\psi'\, dr + 2\int_0^1 u'u\psi\, dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 u''ur^2\psi'\, dr - \int_0^1 \left|u'\right|^2 r\psi\, dr - 2\int_0^1 u'ur\psi'\, dr + \int_0^1 u'u\psi\, dr \\
&= \int_0^1 \left|u'\right|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr + \frac{1}{2}\int_0^1 u'ur^2\psi''\, dr - \int_0^1 u'ur\psi'\, dr + \int_0^1 u'u\psi\, dr \\
&= \int_0^1 \left|u'\right|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr + \frac{1}{2}\int_0^1 u'ur^2\psi''\, dr + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2r\psi''\, dr \\
&= \int_0^1 \left|u'\right|^2\left(\frac{1}{2}r^2\psi' - r\psi\right)\, dr - \frac{1}{4}\int_0^1 u^2r^2\psi'''\, dr.
\end{aligned}$$

Es folgt (ii) und somit (4.7).
Schritt 2: Nun wollen wir ψ so wählen, dass wir einen Widerspruch erhalten.

Eine geeignete Wahl ist

$$\psi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \psi(r) := \sin\left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right),$$

denn für dieses ψ verschwindet die linke Seite in (4.7). Wir rechnen nach:
Es gilt $\psi \in C^3([0,1])$, $\psi(0) = 0$ und wegen $\lambda \in (0, \frac{\pi^2}{4}]$ auch $\psi(1) \geq 0$. Damit erfüllt ψ alle in Schritt 1 geforderten Eigenschaften. Für $0 < r < 1$ gilt

$$\frac{1}{4}\psi'''(r) = \frac{1}{4}\left(-8\lambda\sqrt{\lambda}\cos\left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right)\right) = -\lambda\left(2\sqrt{\lambda}\cos\left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right)\right) = -\lambda\psi'(r)$$

und wir erhalten somit aus (4.7)

$$0 \geq \frac{2}{3}\int_0^1 u^6(r)\left(r\psi(r) - r^2\psi'(r)\right)\, dr. \tag{4.8}$$

Aufgrund der Beziehung $\sin\varphi > \varphi\cos\varphi$ für $\varphi \in (0,\pi]$ gilt für $0 < r < 1$

$$r\psi(r) - r^2\psi'(r) = r\left(\sin\left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right) - \left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right)\cos\left(2\sqrt{\lambda} \cdot r\right)\right) > 0. \tag{4.9}$$

Da aber u als Lösung von (3.24) positiv im Innern ist, also $u(r) > 0$ für $0 < r < 1$, folgt mit (4.9)

$$0 < \frac{2}{3}\int_0^1 u^6(r)\left(r\psi(r) - r^2\psi'(r)\right)\, dr,$$

im Widerspruch zu (4.8). Dieser Widerspruch komplettiert den Beweis. □

Wieder erhalten wir mit der Regularität von Lösungen auf glatten Gebieten eine Verallgemeinerung des Satzes.

Korollar 4.8 (Nichtexistenz für $\lambda \leq \lambda^*$ für die Einheitskugel)**.** *Sei* $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ *und* $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$*. Dann existiert keine schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (3.24)*.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 4.7 mit Bemerkung 4.4. □

Abschließend geben wir an dieser Stelle wieder eine Verallgemeinerung auf beliebige Kugeln an.

Bemerkung 4.9 (Nichtexistenz für $\lambda \leq \lambda^*$ für Kugeln)**.** *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *eine Kugel und* $\lambda \leq \frac{\lambda_1}{4}$*. Dann existiert keine schwache Lösung* $u \in H_0^1(\Omega)$ *von* (3.24)*.*

5 Anhang

5.1 Notationen

- Ω: Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, meist ein beschränktes Gebiet.
- $\|\cdot\|_p$: L^p-Norm auf Ω.
- $2^* := \frac{2n}{n-2}$ kritischer Sobolev-Exponent.
- $B_r(x_0)$: Offene Kugel um x_0 mit Radius $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}_+$: Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen.
- $\partial\Omega$: Rand der Menge Ω.
- $|\Omega|$: Das Lebesgue-Maß der Menge Ω.
- o, $\mathcal{O}$: Landau-Symbole.
- (u_k), $(u_k)_k$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$: Folge mit Laufindex $k \in \mathbb{N}$. Teilfolgen werden wieder gleich bezeichnet.
- $C^k(\Omega)$: Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω.
- $H^k(\Omega)$: Sobolevraum der Ableitungsstufe k zum Index $p = 2$.
- klassische Lösung einer PDE: Die Lösung ist von der Klasse $C^2(\overline{\Omega})$, die Gleichung und die Randbedingung ist punktweise erfüllt.
- schwache Lösung einer PDE: Die Lösung ist von der Klasse $H^1(\Omega)$, die Gleichung ist im Distributionssinne und die Randbedingung ist im Spursinne erfüllt.

5.2 Lösungen auf allgemeineren Gebieten in drei Dimensionen

Es mag ein wenig unbefriedigend sein, dass wir für Raumdimension $n = 3$ nur Kugeln betrachtet haben. Tatsächlich lässt sich aber auch ein Resultat für allgemeinere Gebiete angeben, siehe [AM07, p. 180].

Satz 5.1 (Existenz für allgemeine Gebiete im Fall $n = 3$)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Dann gibt es ein $\lambda^* \in [0, \lambda_1)$, so dass genau dann eine schwache Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ von* (3.24) *existiert, wenn $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$.*

Literaturverzeichnis

[AM07] Ambrosetti, A., and Malchiodi, A., *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007

[Aub76] Aubin, T., *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pures et Appl. 55, pp. 269-293, 1976

[BB98] Brezis, H., and Browder, F., *Partial Differential Equations in the 20th Century*, Advances in Mathematics 135, pp. 76-144, 1998

[BL83] Brezis, H., and Lieb, E., *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 88, No. 3, pp. 486-490, 1983

[BN83] Brezis, H., and Nirenberg, L., *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., 36(4):437-477, 1983

[Eva10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Vol. 19, Second Edition, 2010

[GNN79] Gidas, B., Ni, W. M. and Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68, pp. 209-243, 1979

[Lie83] Lieb, E., *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev inequality and related inequalities*, in Annals of Math., Vol. 118, No. 2, pp. 349-374, 1983

[Sch13] Schweizer, B., *Partielle Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013

[Str08] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer-Verlag, Fourth Edition, Berlin-Heidelberg, 2008

[Tal76] Talenti, G., *Best constants in Sobolev inequality*, Annali di Mat. 110, pp. 353-372, 1976