Diplomarbeit

zum Thema

„Scharf transitive κ-freie R-Moduln“

von

Daniel Herden

19. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über Inhalt und Aufbau der Diplomarbeit, sowie über einige wichtige Definitionen und Sätze, die in den nachfolgenden Kapiteln als Grundlage vorausgesetzt werden.

1.1 Erste Definitionen

Mit M sei im folgenden ein linker R-torsionsfreier R-Modul über einem Itegritätsbereich R bezeichnet. Ferner sei R^* die Einheitengruppe von R.
Alle Definitionen dieses Abschnitts beziehen sich auf Ring R.

Desweiteren sei **Aut** M die Automorphismengruppe und **End** M der Endomorphismenring von M. Die Identität auf M sei mit 1, der Nullhomomorphismus mit 0 bezeichnet.
Der **Rang** eines Moduls M ist die Mächtigkeit der größten Teilmenge $T \subseteq M$ in M unabhängiger Elemente. Er sei mit **rk** M bezeichnet.
Ist U ein Untermodul von M, so schreiben wir hierfür abkürzend $U \subseteq M$. Ist T eine Teilmenge von M, so schreiben wir auch hierfür abkürzend $T \subseteq M$. Für jede Teilmenge T von M sei $\langle T \rangle$ bzw. $\langle T \rangle_R$ der von T erzeugte Untermodul des R-Moduls M. Ist ein Untermodul U ein direkter Summand von M, so schreiben wir abkürzend $U \sqsubseteq M$.
Ein Untermodul U von M heißt R**-rein** ($U \subseteq_* M$ bzw. $U \subseteq_{*R} M$), falls

$$\forall u \in U, m \in M, r \in R : (rm = u \Longrightarrow \exists u' \in U : ru' = u).$$

Ist M ein R-torsionsfreier R-Modul und T eine Teilmenge von M, so existiert ein eindeutig bestimmter kleinster R-reiner Untermodul von M, der T enthält, die sogenannte **Bereinigung** $\langle T \rangle_*$ bzw. $\langle T \rangle_{*R}$ von T in M: $\langle T \rangle_* = \bigcap \{U \subseteq_* M | T \subseteq U\} =$
$\{m \in M | \exists r \in R \setminus \{0\} : rm \in \langle T \rangle\}$. Ist insbesondere U ein Untermodul von M, so ergibt sich $U_* = \langle U \rangle_* = \{m \in M | \exists r \in R \setminus \{0\} : rm \in U\}$. Ist $U \subseteq_* M$ und $T \subseteq U$ eine maximale Teilmenge unabhängiger Elemente in U, so gilt $U = \langle T \rangle_*$.
Ein Element $m \in M$ heißt R**-rein** ($m \in_* M$), falls $\forall\, r \in R,\ m' \in M :$
$rm' = m \Longrightarrow r \in R^*$. Es bezeichne $\mathfrak{p}M$ die Menge der R-reinen Elemente von M.

1.2 UT-Moduln über PIDs

Ist R ein Hauptidealring, so bezeichnen wir ihn abkürzend auch als einen **PID**. Für einen PID R sei $\mathrm{P}(R)$ die Menge der Primelemente von R.
Für ein Primelement p des PID R sei $\widehat{R}_p$ die p-adische Vervollständigung von R.

In dieser Diplomarbeit bezeichne R immer einen PID mit $R \neq \widehat{R}_p$ für ein $p \in \mathrm{P}(R)$. Insbesondere ist $\mathrm{P}(R) \neq \emptyset$, der PID R ist kein Körper und $\aleph_0 \leq |R|$. Im folgenden stehen Begriffe wie torsionsfrei, rein, etc. synonym für R-torsionsfrei, R-rein, etc., bezogen auf obigen PID R.
Es bezeichne M immer einen linken R-Modul. Insbesondere folgt aus $M \neq 0$, daß $\aleph_0 \leq |R| \leq |M|$.

Thema dieser Diplomarbeit ist die Konstruktion von UT-Moduln eines vorgegebenen Ranges κ über dem PID R. Gödels Universum (V=L) dient hierbei als mengentheoretische Grundlage. Allerdings benötigen wir nur das unter V=L geltende Diamantprinzip $\diamondsuit_\kappa$ für diese Kardinalzahl κ; siehe hierzu auch [5, Chapter VI.1, S. 144ff].

Definition 1.1
(a) Ein R-Modul M heißt **T-Modul** *(transitiv), falls zu jedem Paar von Elementen $m_1, m_2 \in \mathfrak{p}M$ ein Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ mit $m_1\varphi = m_2$ existiert.*
(b) Ein T-Modul heißt **UT-Modul** *(scharf transitiv oder eindeutig transitiv), falls obiger Automorphismus φ zusätzlich immer eindeutig bestimmt ist.*

Insbesondere ist R selbst immer ein UT-Modul.

Die Frage nach UT-Moduln wird trivial, wenn wir R-Moduln M mit $\mathfrak{p}M = \emptyset$ betrachten, was z.B. für R-teilbare Moduln gilt. Es besteht also Interesse an nichttrivialen Moduln M, wie es mit Moduln vom Typ 0 der Fall ist.
Ein torsionsfreier R-Modul M über dem PID R ist vom **Typ 0**, falls jedes Element $0 \neq m \in M$ in der Form $m = rm'$ mit $r \in R$ und $m' \in \mathfrak{p}M$ darstellbar ist.
Insbesondere gilt für einen Modul M vom Typ 0 mit $|R| < |M|$, daß $|\mathfrak{p}M| = |M|$. Für

einen solchen Modul M ist somit $\mathfrak{p}M$ immer eine große Teilmenge von M.
Die folgenden Moduln sind vom Typ 0:

Definition 1.2 *Es sei $|R| < \kappa$ eine Kardinalzahl.*
(a) Ein R-Modul M heißt **κ-frei**, *falls jeder Untermodul U mit $|U| < \kappa$ frei ist.*
(b) Ein R-Modul M heißt **stark κ-frei**, *falls M κ-frei und zusätzlich jedes Untermodul U mit $|U| < \kappa$ in einem Untermodul U' mit $|U'| < \kappa$ und M/U' κ-frei enthalten ist.*

Zentraler Bestandteil dieser Diplomarbeit ist die Frage nach κ-freien UT-Moduln.
Insbesondere wird die folgende Hauptaussage bewiesen:

Hauptsatz 1.3 *Gegeben sei ein PID R mit $R \neq \widehat{R}_p$ für ein $p \in P(R)$. Dann existiert unter V=L zu jeder regulären, nicht schwach kompakten Kardinalzahl $|R| < \kappa$ ein stark κ-freier UT-Modul M der Kardinalität κ.*

Es bezeichne F eine durch κ Elemente absolut frei erzeugte Gruppe. Desweiteren sei RF für den PID R der Gruppenring aller Polynome mit Monomen aus F und Koeffizienten aus R. Es bezeichne $R^* \times F$ die multiplikative Gruppe aller Monome aus F mit Koeffizienten aus R^*. In Kapitel 3 wird $(RF)^* = R^* \times F$ bewiesen.
Es wird desweiteren gezeigt, daß der UT-Modul M aus Hauptsatz 1.3 eine Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M \cong R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ hat. Wie die folgende Proposition allgemein beweist, ist dieser UT-Modul zudem **unzerlegbar**, d.h. nicht direkte Summe zweier R-Moduln $\neq 0$.

Proposition 1.4 *Es sei M ein UT-Modul vom Typ 0 über den PID R. Dann ist M unzerlegbar.*

Beweis: Angenommen, es wäre $M = M_1 \oplus M_2$ mit $M_1 \neq 0$ und $M_2 \neq 0$. Dann sind auch M_1 und M_2 Moduln vom Typ 0.
Es seien 1_{M_1} und 1_{M_2} die Identitäten auf M_1 bzw. M_2. Dann sind
$\varphi_1 := 1_{M_1} \oplus 1_{M_2} \in \operatorname{Aut} M$ und $\varphi_2 := 1_{M_1} \oplus (-1) \cdot 1_{M_2} \in \operatorname{Aut} M$ mit $x\varphi_1 = x\varphi_2 = x$ für alle $x \in \mathfrak{p}M_1 \neq 0$, was der starken Transitivität von M widerspricht. $\square$

Hauptsatz 1.3 ist somit eine Verschärfung der V=L Konstruktion in Dugas, Shelah [4], welche T-Moduln lieferte.

1.3 Das Diamant-Prinzip

Obschon sowohl die Fragestellung als auch größte Teile des Beweises von Hauptsatz 1.3 auf algebraischen Überlegungen beruhen, bildet den innersten Kern des Beweises eine mengentheoretische Beweismethode: das Diamant-Prinzip.
Dies ist kein zufälliges Phänomen: Seit der eingehenden Analyse des Whitehead-Problems durch Saharon Shelah in den Jahren 1974 bis 1980 ist bekannt, daß die Wahl des zugrundeliegenden Systems der Mengenlehre Einfluß auf die Frage der Konstruierbarkeit algebraischer Objekte haben kann. Seitdem wurden, nicht zuletzt von Shelah selbst, verschiedenste mengentheoretische Beweismethoden entwickelt: schwacher Diamant Φ_κ, allgemeine Black Box, starke Black Box, etc., um nur einige zu nennen.
Es handelt sich jeweils um kombinatorische Formulierungen des Jensenschen Diamant-Prinzips $\diamondsuit_\kappa$, welches Jensen für das Gödelsche Universum V=L nachgewiesen hat; siehe hierzu [10].
All diesen Beweismethoden ist gemein, daß stärkere Voraussetzungen an das benutzte System der Mengenlehre zu Vereinfachungen des algebraischen Anteils des Beweises führen. Hierbei geht das Diamant-Prinzip von den stärksten mengentheoretischen Voraussetzungen aus: Es gilt in Gödels Universum V=L, während z.B. für die allgemeine Black Box die „gewöhnliche Mengenlehre“, also das Axiomensystem von Zermelo-Fränkel mit Auswahlaxiom (ZFC), ausreicht.
Die stärkeren Voraussetzungen an das System der Mengenlehre erlauben algebraisch stärkere Aussagen: In [8], wo die Konstruktion von UT-Moduln mittels der starken Black Box erfolgt, gelingt lediglich die Konstruktion $\aleph_1$-freier Moduln, wogegen das Diamant-Prinzip nach Hauptsatz 1.3 die Konstruktion κ-freier Moduln erlaubt, freilich auf Kosten der Mengenlehre.
Es ist wohlbekannt, daß die Existenz stark κ-freier Moduln unter ZFC unentscheidbar ist, sodaß sich Hauptsatz 1.3 nicht auf ZFC anstelle V=L verallgemeinern läßt.

Zunächst einige einleitende Definitionen:
Für eine Limesordinalzahl α ($\alpha \in \text{LORD}$) sei ihre **Kofinalität** die kleinste Kardinalzahl λ , für die eine Teilmenge $T \subseteq \alpha$ mit $|T| = \lambda$ und $\sup(T) := \bigcup_{t\in T} t = \alpha$ existiert.

Für die Kofinalität von α schreiben wir abkürzend auch $\mathrm{cf}(\alpha)$. Eine Kardinalzahl κ heißt **regulär**, falls $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$.
Mit λ sei im folgenden eine Kardinalzahl, mit $\aleph_0 < \kappa$ eine reguläre Kardinalzahl bezeichnet.

Definition 1.5 *Eine Teilmenge C von λ heißt* **cub** *(closed unbounded), falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:*
(i) C ist **abgeschlossen** *in λ, d.h. $\forall\ T \subseteq C : (\sup T \in \lambda \Longrightarrow \sup T \in C)$.*
(ii) C ist **unbeschränkt** *in λ, d.h. $\sup C = \lambda$.*

Ist λ eine Kardinalzahl und $C \subseteq \lambda$ ein cub, so gilt $\mathrm{cf}(\lambda) \leq |C| \leq \lambda$, da C unbeschränkt ist.
Eine Teilmenge S von λ heißt **stationär**, falls $S \cap C \neq \emptyset$ für jedes cub $C \subseteq \lambda$. Stationäre Mengen sind immer unbeschränkt, aber im allgemeinen nicht abgeschlossen. Als bekanntes Beispiel für stationäre Mengen sei erwähnt:

Lemma 1.6 *Für jede reguläre Kardinalzahl $\aleph_0 \leq \rho < \kappa$ ist $E_\rho := \{\alpha \in \kappa | \mathrm{cf}(\alpha) = \rho\}$ stationär.*

Beweis: Siehe [5, Example II.4.7, S. 37].

Es sei $\kappa^{\mathbf{o}} := E_{\aleph_0}$.
Der Durchschnitt von weniger als $\mathrm{cf}(\lambda)$ cubs in λ ist wieder ein cub. Ist $S \subseteq \lambda$ stationär und $C \subseteq \lambda$ ein cub, so ist auch $S \cap C$ stationär. Näheres zu cubs siehe in [5, Chapter II.4, S. 35ff].
Eine Teilmenge $E \subseteq \kappa$ heißt **nicht reflexiv**, falls $E \cap \alpha$ nicht stationär bezüglich α für jede Ordinalzahl $\alpha \in \kappa$ mit $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\alpha)$ ist. Insbesondere existiert bei einer nicht reflexiven Menge E für jede Ordinalzahl $\alpha \in \kappa$ mit $\aleph_0 < \mathrm{cf}(\alpha)$ ein cub C von α mit $C \subseteq \alpha \setminus E$. Eine reguläre Kardinalzahl κ heißt **nicht schwach kompakt**, falls sie eine nicht reflexive, stationäre Menge $E \subseteq \kappa^o$ enthält.

Definition 1.7 (Diamant-Prinzip $\diamondsuit_\kappa(E)$)
Sei $E \subseteq \kappa$ eine stationäre Menge. Wir sagen **„$\diamondsuit_\kappa(E)$ gilt“** *, falls eine Familie*

$\{W_\alpha \subseteq \alpha | \alpha \in E\}$ von Teilmengen von κ existiert, so daß für alle Teilmengen $X \subseteq \kappa$ die Menge $\{\alpha \in E | W_\alpha = X \cap \alpha\}$ stationär in κ ist.

Für das Diamant-Prinzip bewies Ron Jensen 1972 den folgenden fundamentalen Satz.

Satz 1.8 (R. Jensen)
Unter V=L *gilt das Diamant-Prinzip $\diamondsuit_\kappa(E)$ für alle regulären Kardinalzahlen $\aleph_0 < \kappa$ und stationären Teilmengen $E \subseteq \kappa$.*

Beweis: Siehe [10].

Im folgenden soll der Satz von Jensen für algebraische Anwendungen nutzbar gemachen werden. Hierzu wird der Satz von Jensen zunächst für κ-Filtrationen umformuliert.
Für ein $\alpha \in LORD$ ist eine **aufsteigenden Kette** $(A_i)_{i \in \alpha}$ von R-Moduln durch die Eigenschaft $\forall j \leq k < \alpha : A_j \subseteq A_k$ definiert.

Definition 1.9 *Gegeben sei eine Menge A der Mächtigkeit $|A| \leq \kappa$. Eine aufsteigende Kette $(A_i)_{i \in \kappa}$ heißt eine κ-**Filtration**, falls sie die folgenden Eigenschaften hat:*
(i) Für alle $i \in \kappa$ gilt $|A_i| < \kappa$.
(ii) Die Kette ist **stetig**, *d.h. $\forall\ \alpha \in \mathrm{LORD} \cap \kappa : \bigcup_{i \in \alpha} A_i = A_\alpha$.*
(iii) $\bigcup_{i \in \kappa} A_i = A$.
*Wir sprechen dann abkürzend auch von der κ-**Filtration** $A = \bigcup_{i \in \kappa} A_i$.*

Es folgt nun aus dem Satz von Jensen:

Lemma 1.10 *Seien $A = \bigcup_{i \in \kappa} A_i$ und $B = \bigcup_{i \in \kappa} B_i$ zwei κ-Filtrationen. Desweiteren sei E eine stationäre Teilmenge von κ. Dann existieren Funktionen $g_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ ($\alpha \in E$) so, daß für alle Funktionen $g : A \to B$ die Menge $\{\alpha \in E | g_\alpha = g \restriction A_\alpha\}$ stationär ist.*

Beweis: Siehe [5, Lemma VI.1.2, S. 145].

Wir bezeichnen die Funktionen g_α auch als **Jensen-Funktionen**.

1.4 Der Aufbau des Beweises

Der Beweis des Hauptsatzes 1.3 gestaltet sich recht umfangreich, weshalb eine Einteilung in Zwischenetappen geboten ist.

Kapitel 2 befaßt sich zunächst mit der sogenannten „Freien UT-Konstruktion“: Es wird eine Konstruktion angegeben, die jeden freien R-Modul M in einen freien R-Modul M' einbettet, sodaß eine Untergruppe $G \subseteq \operatorname{Aut} M'$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M'$ agiert. Diese Konstruktion greift noch nicht auf mengentheoretische Hilfsmittel zurück, sondern beschäftigt sich mit der Frage, wie sich ein partieller Automorphismus durch geschickte Modulerweiterungen zu einem Automorphismus fortsetzen läßt.

Im Kapitel 3 wird die Hauptkonstruktion vorgestellt, die den für Hauptsatz 1.3 benötigten R-Modul M liefert. Zudem werden einige einfache Eigenschaften dieses Moduls bewiesen. Insbesondere werden hier das Diamant-Prinzip und das Stufen-Lemma benutzt, um die Endomorphismen von M zu charakterisieren.

Kapitel 4 ist dem Beweis des Stufen-Lemmas gewidmet. Dieses Lemma ermöglicht es, unerwünschte Endomorphismen im Verlauf der Hauptkonstruktion zu eliminieren, um so das Aussehen von $\operatorname{End} M$ zu kontrollieren.

In Kapitel 5 beweisen wir für den konstruierten Modul M die „Surjektivitäts-Falle“, einen Hilfssatz, der es unter gewissen Voraussetzungen erlaubt, aus der Surjektivität von Endomorphismen deren Bijektivität zu folgern.

Kapitel 6 schließt den Beweis von Hauptsatz 1.3 ab, während Kapitel 7 einige naheliegende Verallgemeinerungen dieses Satzes diskutiert.

2 Die Freie UT-Konstruktion

Für einen PID S und Elemente $a, b \in S$ schreiben wir abkürzend „$a|b$" für „a teilt b". Die Elemente a und b heißen **assoziiert**, falls $a|b$ und $b|a$ gilt, d.h. es existiert eine Einheit $e \in S^*$ mit $ae = b$. Für jedes $s \in S \setminus (S^* \cup \{0\})$ existiert eine bis auf Assoziiertheit und Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmte Darstellung $s = \prod_{i=1}^{n} s_i$ als endliches Produkt von Primelementen.

Moduln über einem PID besitzen die angenehme Eigenschaft, daß sich die wichtigsten Sätze über abelsche Gruppen analog formulieren lassen. Insbesondere seien die folgenden Sätze erwähnt:

Satz 2.1
(a) Sei S ein PID und M ein freier S-Modul. Dann ist jeder Untermodul von M frei.
(b) Sei S ein PID und M ein endlich erzeugter S-Modul. Es ist M genau dann frei, falls M torsionsfrei ist.

Beweis: Siehe [1, Proposition 10.6.1, S. 283 und Corollary 10.6.2', S. 285].

Satz 2.2 *Sei S ein PID, M ein S-Modul und U ein Untermodul von M. Dann folgt aus M/U frei, daß $U \sqsubseteq M$.*

Beweis: Siehe [6, Lemma 9.4, S. 47].

Satz 2.3 (Pontryagin)
Sei S ein PID und M ein S-Modul mit $\operatorname{rk} M \leq \aleph_0$. Es ist M genau dann frei, falls jeder Untermodul $U \subseteq M$ mit $\operatorname{rk} U < \aleph_0$ frei ist.

Beweis: Siehe [6, Theorem 19.1, S. 91].

Näheres zu Moduln über PIDs siehe in [1, Chapter 10.6, S. 283ff].

Als Vorübung zum eigentlichen Beweis von Hauptsatz 1.3 wird im folgenden eine Konstruktion angegeben, mit der sich jeder freie R-Modul M in einen freien R-Modul M'

einbetten läßt, sodaß eine Untergruppe $G \subseteq \operatorname{Aut} M'$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M'$ agiert. Es wird hierbei auf die pushout-Konstruktion aus [8] zurückgegriffen.
Hierzu sind zunächst einige wichtige Hilfsobjekte zu definieren und hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu untersuchen.

Definition 2.4 *Eine Abbildung φ heißt ein* **partieller Automorphismus** *des Moduls M, falls φ ein Isomorphismus mit* $\operatorname{Dom}\varphi \subseteq M$ *und* $\operatorname{Im}\varphi \subseteq M$ *ist.*

Ist φ ein partieller Automorphismus des Moduls M, so bezeichne φ^{-1} die Umkehrabbildung von φ. Es ist zu beachten, daß φ^{-1} nicht das Inverse von φ im üblichen Sinne ist. Insbesondere gilt $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1$ nur für $\operatorname{Dom}\varphi = \operatorname{Im}\varphi = M$. Wir bezeichnen φ^{-1} als das **schwach Inverse** von φ.
Es bezeichne 0_t denn trivialen partiellen Automorphismus φ mit $\operatorname{Dom}\varphi = \operatorname{Im}\varphi = 0$.
Die Verknüpfung $\varphi\mu$ zweier partieller Automorphismen φ, μ ist offensichtlich wieder ein partieller Automorphismus, falls wir $\operatorname{Dom}\varphi\mu = (\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Dom}\mu)\varphi^{-1}$ und $\operatorname{Im}\varphi\mu = (\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Dom}\mu)\mu$ setzen. Die partiellen Automorphismen eines Moduls M bilden einen Monoid mit Einselement 1, wobei 1 wieder die Identität auf ganz M ist.

Definition 2.5 *Für einen Modul M sei* **pAut** *M die Menge aller partiellen Automorphismen auf M mit* $M/\operatorname{Dom}\varphi$ *und* $M/\operatorname{Im}\varphi$ *frei.*

Lemma 2.6 *Für einen Modul M ist* $\operatorname{pAut} M$ *ein Untermonoid des Monoids aller partiellen Automorphismen auf M. Das Monoid* $\operatorname{pAut} M$ *ist unter schwach Inversen abgeschlossen. Das Einselement von* $\operatorname{pAut} M$ *ist* 1.

Beweis: Es seien partielle Automorphismen $\varphi, \mu \in \operatorname{pAut} M$ gegeben. Dann sind auch $\varphi\mu$ und φ^{-1} partielle Automorphismen.
Es ist $M/\operatorname{Dom}\varphi^{-1} = M/\operatorname{Im}\varphi$ frei und $M/\operatorname{Im}\varphi^{-1} = M/\operatorname{Dom}\varphi$ frei, somit $\varphi^{-1} \in \operatorname{pAut} M$.
Desweiteren folgt aus $\mu \in \operatorname{pAut} M$, daß

$$\operatorname{Im}\varphi/(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Dom}\mu) \cong (\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Dom}\mu)/\operatorname{Dom}\mu \subseteq M/\operatorname{Dom}\mu$$

frei ist. Anwenden von φ^{-1} liefert, daß $\operatorname{Dom}\varphi/(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Dom}\mu)\varphi^{-1} = \operatorname{Dom}\varphi/\operatorname{Dom}\varphi\mu$ frei ist. Aus $\varphi \in \operatorname{pAut} M$ folgt $M/\operatorname{Dom}\varphi$ frei, und mit $\operatorname{Dom}\varphi/\operatorname{Dom}\varphi\mu$ frei schließlich $M/\operatorname{Dom}\varphi\mu$ frei. Analog zeigt man $M/\operatorname{Im}\varphi\mu$ frei, weshalb $\varphi\mu \in \operatorname{pAut} M$. Offensichtlich ist $1 \in \operatorname{pAut} M$

Somit ist $\operatorname{pAut} M$ ein Untermonoid des Monoids aller partiellen Automorphismen auf M und bezüglich schwach Inverser abgeschlossen. $\square$

Es sei hier noch eine wichtige Eigenschaft der partiellen Automorphismen in $\operatorname{pAut} M$ erwähnt.

Lemma 2.7 *Für einen Modul M sei $\varphi \in \operatorname{pAut} M$ gegeben.*
Dann gilt für jedes $x \in \operatorname{Dom}\varphi$: $x \in \mathfrak{p}M \iff x\varphi \in \mathfrak{p}M$.

Beweis:

$\Longrightarrow$: Es sei ein $x \in \mathfrak{p}M \cap \operatorname{Dom}\varphi$ gegeben. Angenommen es existieren $y \in M$ und $r \in R$ mit $x\varphi = ry$. Modulo $\operatorname{Im}\varphi$ folgt $0 = x\varphi + \operatorname{Im}\varphi = r(y + \operatorname{Im}\varphi) \in M/\operatorname{Im}\varphi$ torsionsfrei, also $r = 0$ oder $y \in \operatorname{Im}\varphi$.

Aus $r = 0$ folgt $x = ry = 0$, im Widerspruch zu $x \in \mathfrak{p}M$. Also ist $y \in \operatorname{Im}\varphi \Longrightarrow y = x'\varphi$ für ein $x' \in M$. Also gilt $x\varphi = ry = (rx')\varphi \Longrightarrow x = rx' \Longrightarrow r \in R^*$, $x\varphi$ ist ein Element von $\mathfrak{p}M$.

$\Longleftarrow$: Folgt analog, indem man φ durch φ^{-1} ersetzt. $\square$

Wir identifizieren jedes Element $r \in R$ mit dem von ihm kanonisch induzierten Endomorphismus $m \mapsto rm$ auf M. Dann ist R^* eine Untergruppe von $\operatorname{Aut} M$.

Ist T eine Teilmenge von $\operatorname{pAut} M$, so sei $\langle T \rangle$ das von $R^* \cup T \cup T^{-1}$ durch Produktbildung erzeugte Untermonoid, wobei $T^{-1} := \{\varphi^{-1} | \varphi \in T\}$.

Für Hauptsatz 1.3 ist ein Modul M mit $\operatorname{Aut} M \cong R^* \times F$ für eine absolut freie Gruppe F zu konstruieren. Es ist daher nötig Zuordnungen zwischen Basiselementen absolut freier Gruppen und (zunächst) partieller Automorphismen zu betrachten.

Es sei $\mathfrak{F} = \{\varphi_t | t \in J\}$ eine Basis der absolut freien Gruppe $\langle \mathfrak{F} \rangle$. Mit $R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ sei die multiplikative Gruppe aller Monome aus $\langle \mathfrak{F} \rangle$ mit Koeffizienten in R^* bezeichnet. Ist $\varphi = r\varphi' \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ mit $r \in R^*$ und $\varphi' \in \langle \mathfrak{F} \rangle$ gegeben, so gilt $\varphi^{-1} = (r\varphi')^{-1} = r^{-1}\varphi'^{-1}$. Desweiteren sei eine Abbildung $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ gegeben. Dann läßt sich π in eindeutiger Weise zu einer Abbildung auf ganz $R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ fortsetzen, indem wir zu jedem Element $\mu \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ die eindeutig bestimmte **reduzierte Darstellung** $\mu = r \cdot \mu_1 \cdots \mu_n$ mit $r \in R^*$ und $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathfrak{F} \cup \mathfrak{F}^{-1}$ wählen und $\pi(\mu) := r \cdot \pi(\mu_1) \cdots \pi(\mu_n)$ setzen. Hierbei sei $\mathfrak{F}^{-1} := \{\varphi_t^{-1} | t \in J\}$, $\pi(1) := 1 \in \mathrm{pAut}\, M$ und $\pi(\varphi_t^{-1}) := \pi(\varphi_t)^{-1}$ für $t \in J$.
Sind $\mu_1, \mu_2 \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ Elemente in ihrer reduzierten Darstellung und ist μ die reduzierte Darstellung von $\mu_1\mu_2$, so gilt lediglich $\pi(\mu_1)\pi(\mu_2) \subseteq \pi(\mu)$ als Mengenrelation zwischen den Graphen der beteiligten Funktionen; d.h., es gilt $\mathrm{Dom}\, \pi(\mu_1)\pi(\mu_2) \subseteq \mathrm{Dom}\, \pi(\mu)$ und $\pi(\mu) \restriction \mathrm{Dom}\, \pi(\mu_1)\pi(\mu_2) = \pi(\mu_1)\pi(\mu_2)$. Im allgemeinen gilt nicht $\mathrm{Dom}\, \pi(\mu_1)\pi(\mu_2) = \mathrm{Dom}\, \pi(\mu)$. Gleichheit gilt z.B., falls das formale Produkt $\mu_1\mu_2$ selbst reduziert ist.

Im folgenden stehe $\langle \mathfrak{F} \rangle = \{\varphi_t | t \in J\}$ immer für eine absolut freie Gruppe mit Basis $\mathfrak{F}$, π sei eine Abbildung $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$, die in obiger kanonischer Weise mit einer Abbildung $\pi : R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle \to \mathrm{pAut}\, M$ identifiziert wird.

Definition 2.8 *Es sei M ein R-Modul. Wir sagen, daß eine Abbildung $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ bezüglich M die* **U-Eigenschaft** *besitzt, falls $\varphi = \varphi'$ für alle $\varphi, \varphi' \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ mit $x\pi(\varphi) = x\pi(\varphi')$ für ein $x \in \mathfrak{p}M$ folgt.*

Genügt eine Abbildung $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ der U-Eigenschaft bezüglich M, so ist insbesondere für jedes $x \in \mathfrak{p}M$ die Abbildung $\xi : R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle \to \mathfrak{p}M$ $(\varphi \mapsto x\pi(\varphi))$ injektiv. Es folgt $|\mathfrak{F}| \leq |\langle \mathfrak{F} \rangle| \leq |R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle| \leq |\mathfrak{p}M| \leq |M|$ und somit $|\mathfrak{F}| \leq |M|$.
Die U-Eigenschaft aus Definition 2.8 ist der Keim, aus dem die Schärfe der scharfen Transitivität der später zu konstruierenden R-Moduln erwächst.
Für den praktischen Nachweis der U-Eigenschaft ist das folgende Lemma wichtig.

Lemma 2.9 *Die Abbildung* $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ *besitzt für den Modul M die U-Eigenschaft genau dann, wenn für jedes* $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ *mit* $x\pi(\varphi) = x$ *für ein* $x \in \mathfrak{p}M$ *gilt, daß* $\varphi = 1 \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$.

Beweis:

$\Longrightarrow$: π besitze die U-Eigenschaft. Dann gilt $x\pi(\varphi) = x = x\pi(1) \Longrightarrow \varphi = 1$.

$\Longleftarrow$: Für jedes reduziertes Element $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ mit $x\pi(\varphi) = x$ für ein $x \in \mathfrak{p}M$ gelte, daß $\varphi = 1$. Es seien desweiteren ein $x' \in \mathfrak{p}M$ und $\varphi'_1, \varphi'_2 \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ mit $x'\pi(\varphi'_1) = x\pi(\varphi'_2)$ gegeben. Es sei φ' die reduzierte Darstellung von $\varphi'_1{\varphi'}_2^{-1}$.

Dann gilt $x'\pi(\varphi'_1) = x'\pi(\varphi'_2) \Longrightarrow x'\pi(\varphi'_1)\pi({\varphi'}_2^{-1}) = x' \Longrightarrow x'\pi(\varphi') = x' \Longrightarrow 1 = \varphi' = \varphi'_1{\varphi'}_2^{-1} \Longrightarrow \varphi'_1 = \varphi'_2$. Somit besitzt π die U-Eigenschaft. □

Vorläufiges Ziel dieses Kapitels ist es nun, aus einem Modul M und einer Abbildung $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ mit der U-Eigenschaft durch geschickte Erweiterung von M und π zu Moduln M' und Abbildungen $\pi' : \mathfrak{F}' \to \mathrm{pAut}\, M'$ mit der U-Eigenschaft derart zu gelangen, daß $\pi'(R^* \times \langle \mathfrak{F}' \rangle) \subseteq \mathrm{Aut}\, M'$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M'$ agiert. Hierzu wird im folgenden mit Tripeln $(M, \mathfrak{F}, \pi)$ operiert.

Definition 2.10 *Es sei* $\mathfrak{K}$ *die Familie aller Tripel* $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) =: (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}, \pi^{\mathfrak{x}})$, *die den folgenden Eigenschaften genügen:*

(i) M *ist ein freier R-Modul.*

(ii) $\mathfrak{F}$ *ist Basis einer absolut freien Gruppe.*

(iii) $\pi : \mathfrak{F} \to \mathrm{pAut}\, M$ *besitzt für M die U-Eigenschaft.*

Bezogen auf ein Tripel $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi)$ schreiben wir auch abkürzend $\varphi^{\mathfrak{x}} := \pi(\varphi)$ für alle $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$.

Für Tripel $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{K}$ sind auf folgende Art kanonisch zwei **Ordnungsrelationen** $\subseteq$ und $\sqsubseteq$ definiert.

Definition 2.11 *Es seien* $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in \mathfrak{K}$ *gegeben.*

Wir schreiben $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y}$ $(\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y})$, *falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $M^{\mathfrak{x}} \subseteq M^{\mathfrak{y}}$ $(M^{\mathfrak{x}} \sqsubseteq M^{\mathfrak{y}})$.

(ii) $\mathfrak{F}^{\mathfrak{x}} \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}$ *und* $\varphi_t^{\mathfrak{x}} \subseteq \varphi_t^{\mathfrak{y}}$ *für alle* $t \in J^{\mathfrak{x}}$*, d.h.* $\pi^{\mathfrak{y}}$ *ist eine* **schwache Fortsetzung** *von* $\pi^{\mathfrak{x}}$*.*

Folgende Konstruktion erlaubt das Hinzufügen von partiellen Automorphismen, was für das Erreichen der Transitivität des Endmoduls unerläßlich ist. wir fügen hierbei jeweils partielle Automorphismen mit möglichst kleinen Definitionsbereichen zu, um die U-Eigenschaft von π nicht zu zerstören.

Lemma 2.12 (Hinzufügen von Baby-Automorphismen)
Gegeben seien $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) \in \mathfrak{K}$ *und* $x, y \in \mathfrak{p}M$*, so daß* $x\varphi^{\mathfrak{x}} \neq y$ *für alle* $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$*. Es sei* $\varphi_0^{\mathfrak{y}} : Rx \to Ry$ $(rx \mapsto ry)$ *der natürlich gegebene Isomorphismus. Setzt man* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{y}} := \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}} \cup \{\varphi_0\}$ *und* $\pi^{\mathfrak{y}} := \pi^{\mathfrak{x}} \cup \{(\varphi_0, \varphi_0^{\mathfrak{y}})\}$*, so gilt* $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y} := (M, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}, \pi^{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{K}$*.*

Beweis:
1.) $\varphi_0^{\mathfrak{y}} \in \mathrm{pAut}\, M$: Da M frei ist, existiert ein endlich erzeugter Untermodul M' mit $x \in M' \sqsubseteq M$. Da $Rx \subseteq_* M'$, ist M'/Rx endlich erzeugt und torsionsfrei, also frei. Es folgt $Rx \sqsubseteq M' \sqsubseteq M$, womit $M/\mathrm{Dom}\, \varphi_0^{\mathfrak{y}} = M/Rx$ frei ist. Analog ist $M/\mathrm{Im}\, \varphi_0^{\mathfrak{y}} = M/Ry$ frei.

2.) $\pi^{\mathfrak{y}}$ besitzt die U-Eigenschaft bezüglich M. Dies wird mit Lemma 2.9 bewiesen: Setze $\mathfrak{F}' := \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}$ und $\mu := \varphi_0$. Es seien ein $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F}' \rangle$ und ein $z \in \mathfrak{p}M$ mit $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ gegeben. Dann läßt sich φ immer in der kanonischen Form $\varphi = r \cdot \xi_1 \mu^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \mu^{\varepsilon_{k-1}} \xi_k$ mit $0 \neq \varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $r \in R^*$ und $\xi_i \in \langle \mathfrak{F} \rangle$ darstellen, wobei $\xi_i \neq 1$ mit Ausnahme von ggf. ξ_1 und ξ_k ist. Es ist $\varphi = 1$ zu zeigen.
a) Für alle $i < k$ gilt $\varepsilon_i = 1 \vee \varepsilon_i = -1$. **(1)**
Angenommen, dies wäre falsch. Dann enthält die Darstellung von φ einen Faktor μ^2 oder μ^{-2}. O.E. sei μ^2 ein Faktor von φ, also $(\mu^{\mathfrak{y}})^2$ ein Faktor von $\varphi^{\mathfrak{y}}$. Es gilt $\mathrm{Dom}\, (\mu^{\mathfrak{y}})^2 = (\mathrm{Im}\, \mu^{\mathfrak{y}} \cap \mathrm{Dom}\, \mu^{\mathfrak{y}})(\mu^{\mathfrak{y}})^{-1} = (Ry \cap Rx)(\mu^{\mathfrak{y}})^{-1} = 0$, da aus $Ry \cap Rx \neq 0$ für $x, y \in \mathfrak{p}M$ die Existenz eines $s \in R^*$ mit $x(s \cdot 1)^{\mathfrak{x}} = sx = y$ folgt im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Es ist somit $(\mu^{\mathfrak{y}})^2 = 0_t \Longrightarrow \varphi^{\mathfrak{y}} = 0_t \Longrightarrow \mathrm{Dom}\, \varphi^{\mathfrak{y}} = 0$ im Widerspruch zur Annahme $z \in \mathrm{Dom}\, \varphi^{\mathfrak{y}} \cap \mathfrak{p}M$. Somit gilt (1).

b) Wir betrachten nun den **Pfad** $[z]$ des Elements z unter Abbildung $\varphi^{\mathfrak{y}}$, d.h die Kette der Bilder von z unter schrittweiser Anwendung von $\varphi^{\mathfrak{y}}$:

$$z_0 := z,\; z_1 := rz,\; z_2 := z_1\xi_1^{\mathfrak{y}},\; z_3 := z_2(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_1},\; \cdots,\; z_{2k} := z_{2k-1}\xi_k^{\mathfrak{y}}.$$

Nach Lemma 2.7 besteht $[z]$ nur aus reinen Elementen. Insbesondere gilt für die Elemente z_3 und z_4, falls der Faktor μ^{ε_2} von φ existiert: $z_3 \in \operatorname{Im}(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_1} \wedge z_4 \in \operatorname{Dom}(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_2} \Longrightarrow z_3, z_4 \in (\operatorname{Dom}\mu^{\mathfrak{y}} \cup \operatorname{Im}\mu^{\mathfrak{y}}) \cap \mathfrak{p}M = R^*x \cup R^*y$. Man kann nun o.E. zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1: Es ist $z_3, z_4 \in R^*x$ ($z_3, z_4 \in R^*y$ analog!). Dann gilt $z_3\xi_2^{\mathfrak{y}} = z_4 = sz_3$ für ein geeignetes $s \in R^*$. Aus der U-Eigenschaft von $\pi^{\mathfrak{x}}$ folgt somit $\xi_2 = s$ im Widerspruch zur Reduziertheit der Darstellung von φ.

Fall 2: Es ist $z_3 \in R^*x$, $z_4 \in R^*y$ ($z_3 \in R^*y$, $z_4 \in R^*x$ analog!). Dann existieren $s, s' \in R^*$ mit $z_3 = sx, z_4 = s'y$, weshalb $z_3\xi_2^{\mathfrak{y}} = z_4 \Longrightarrow sx\xi_2^{\mathfrak{y}} = s'y \Longrightarrow x(ss'^{-1}\xi_2^{\mathfrak{x}}) = x(ss'^{-1}\xi_2^{\mathfrak{y}}) = y$ mit $ss'^{-1}\xi_2 \in R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

Wir haben gezeigt: Der Faktor μ^{ε_2} von φ kann nicht existieren. Somit vereinfacht sich die Darstellung von φ zu $\varphi = r \cdot \xi_1\mu^{\varepsilon_1}\xi_2$. **(2)**

c) Angenommen, in φ existiert der Faktor μ^{ε_1}. Laut (1) und (2) vereinfacht sich die anfängliche Annahme $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ zu $r \cdot z\xi_1^{\mathfrak{y}}(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_1}\xi_2^{\mathfrak{y}} = z$, wobei $\varepsilon_1 \in \{1, -1\}$. Indem man ggf. μ durch μ^{-1} austauscht, kann man o.E. $\varepsilon_1 = 1$ und somit $r \cdot z\xi_1^{\mathfrak{y}}\mu^{\mathfrak{y}}\xi_2^{\mathfrak{y}} = z$ annehmen. Wir betrachten wieder den Pfad $[z]$ von z unter Anwendung von φ. Es gilt $z_2 = r \cdot z\xi_1^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{Dom}\mu^{\mathfrak{y}} \cap \mathfrak{p}M = R^*x$ und $z_3 = z_2\mu^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{Im}\mu^{\mathfrak{y}} \cap \mathfrak{p}M = R^*y$ mit $z_3\xi_2^{\mathfrak{y}} = z$. Insbesondere existieren $s, s' \in R^*$ mit $z_2 = sx, z_3 = s'y$, weshalb $y = s'^{-1}z_3 = s'^{-1}z(\xi_2^{\mathfrak{y}})^{-1} = s'^{-1}r^{-1}z_2(\xi_1^{\mathfrak{y}})^{-1}(\xi_2^{\mathfrak{y}})^{-1} = z_2(rs'\xi_2^{\mathfrak{y}}\xi_1^{\mathfrak{y}})^{-1} = sx(rs'\xi_2^{\mathfrak{x}}\xi_1^{\mathfrak{x}})^{-1}$ mit $s(rs'\xi_2\xi_1)^{-1} \in R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes. Somit ist die Annahme falsch, der Faktor μ^{ε_1} von φ existiert nicht.

Somit vereinfacht sich die Darstellung von φ zu $\varphi = r \cdot \xi_1$. **(3)**

d) Aus der Annahme $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ folgt mit (3), daß $rz\xi_1^{\mathfrak{x}} = rz\xi_1^{\mathfrak{y}} = z$. Die U-Eigenschaft von $\pi^{\mathfrak{x}}$ liefert $\varphi = r \cdot \xi_1 = 1$. Somit ist $\varphi = 1$, nach Lemma 2.9 genügt $\pi^{\mathfrak{y}}$ der U-Eigenschaft.

3.) Alle übrigen Bedingungen der Definitionen 2.10 und 2.11 sind offensichtlich erfüllt. $\square$

Man beachte, daß beim Hinzufügen von Baby-Automorphismen immer $M^{\mathfrak{x}} = M^{\mathfrak{y}}$, also insbesondere $|M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{y}}|$ gilt.
Die nächste Konstruktion ermöglicht das Erweitern von Definitionsbereich bzw. Bildbereich eines partiellen Automorphismus; dies ist notwendig, um von partiellen Automorphismen zu Automorphismen zu gelangen. Hierzu sind Kenntnisse über pushouts hilfreich.

Lemma 2.13 *Es seien R-Moduln A, B, C und Homomorphismen $\alpha : C \to A$ und $\beta : C \to B$ gegeben. Dann existieren Homomorphismen $\gamma : A \to D, \delta : B \to D$ und ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmter R-Modul D mit den folgenden Eigenschaften:*
(i) Es gilt $\alpha\gamma = \beta\delta$, d.h. das folgende Abbildungsdiagramm **kommutiert**.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\gamma"] \\ B \arrow[r, "\delta"'] & D \end{tikzcd}$$

(ii) Ist ein weiteres solches kommutierendes Abbildungsdiagramm gegeben,

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & A \arrow[d, "\gamma'"] \\ B \arrow[r, "\delta'"'] & D' \end{tikzcd}$$

so existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $\phi : D \to D'$ mit $\gamma\phi = \gamma'$ und $\delta\phi = \delta'$.

Beweis: Siehe [6, Theorem 10.2, S. 52].

Den in Lemma 2.13 bis auf Isomorphie eindeutig definierten Modul D bezeichnen wir auch als **pushout** des zugehörigen Abbildungsdiagrammes.
Kanonisch setzt man $D := (A \times B)/H$ mit $H := \{(c\alpha, -c\beta) | c \in C\}$, $\gamma : a \mapsto (a, 0) + H$ und $\delta : b \mapsto (0, b) + H$. Näheres zu pushouts siehe in [6, Chapter 10, S. 51ff].

Lemma 2.14 (pushout-Konstruktion)
Gegeben seien ein $\mathfrak{x} = (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}, \pi^{\mathfrak{x}}) \in \mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F} = \{\varphi_i | i \in J\}$ und ein $t \in J$. Dann gilt:

(a) Es existiert ein $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y} := (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}, \pi^{\mathfrak{y}})$*, wobei sich* $M^{\mathfrak{y}}$ *aus* $M^{\mathfrak{x}}$ *durch ein geeignetes pushout ergibt, so daß* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}$*,* $\varphi_i^{\mathfrak{y}} = \varphi_i^{\mathfrak{x}}$ *für* $i \neq t$*,* $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{x}}$*,* $\operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} \cap M^{\mathfrak{x}} = \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{x}}$ *und* $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} + \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{y}}$ *(* **Dom-pushout von** φ_t*).*

(b) Es existiert ein $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y} := (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}, \pi^{\mathfrak{y}})$*, wobei sich* $M^{\mathfrak{y}}$ *aus* $M^{\mathfrak{x}}$ *durch ein geeignetes pushout ergibt, so daß* $\mathfrak{F}^{\mathfrak{y}} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}$*,* $\varphi_i^{\mathfrak{y}} = \varphi_i^{\mathfrak{x}}$ *für* $i \neq t$*,* $\operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{x}}$*,* $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} \cap M^{\mathfrak{x}} = \operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{x}}$ *und* $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} + \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{y}}$ *(* **Im-pushout von** φ_t*).*

Beweis: Setze $M := M^{\mathfrak{x}}$, $M' := M^{\mathfrak{y}}$, $\mathfrak{F} := \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}} := \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}$ und $\mu := \varphi_t$.

zu (a): In Anlehnung an die Methode der pushouts setzen wir $M' := (M \times M)/H$ mit $H := \{(x\mu^{\mathfrak{x}}, -x) | x \in \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}}\} \subseteq M \times M$ an.

Für einen beliebigen Untermodul $U \subseteq M$ definieren wir $U_0 := (U \times 0 + H)/H \subseteq M'$ und $U_1 := (0 \times U + H)/H \subseteq M'$. Es sei $\pi_0 : x \mapsto (x, 0) + H \in M_0$ und
$\pi_1 : x \mapsto (0, x) + H \in M_1$ für $x \in M$.

1.) Es gilt $M' = M_0 + M_1$, $D := M_0 \cap M_1 = (\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}})_0 = (\operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}})_1$
und $M \cong M_0 \cong M_1$. **(1)**

Beweis: $M' = M_0 + M_1$ ist wegen $(x, y) + H = [(x, 0) + H] + [(0, y) + H]$ offensichtlich.
Es gilt $m \in M_0 \cap M_1 \Longrightarrow m = (x, 0) + H = (0, y) + H \Longrightarrow (x, -y) \in H \Longrightarrow$
$y\mu^{\mathfrak{x}} = x \Longrightarrow y \in \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}} \wedge x \in \operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow m = (x, 0) + H \in (\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}})_0 \wedge$
$m = (0, y) + H \in (\operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}})_1 \Longrightarrow D \subseteq (\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}})_0 \wedge D \subseteq (\operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}})_1$.
Ähnlich beweist man „$\supseteq$ “.
Offensichtlich ist $\pi_0 : M \to M_0 \subseteq M'$ surjektiv. Wegen $x_1\pi_0 = x_2\pi_0 \Longrightarrow (x_1, 0) + H = (x_2, 0) + H \Longrightarrow (x_1 - x_2, 0) \in H \Longrightarrow x_1 - x_2 = 0\mu^{\mathfrak{x}} = 0 \Longrightarrow x_1 = x_2$ ist π_0 auch injektiv, also $M \cong M_0$. Analog zeigt man $M \cong M_1$.

Wegen (1) läßt sich $M = M_0 \subseteq M'$ identifizieren. Für $i \neq t$ setze $\varphi_i^{\mathfrak{y}} := \varphi_i^{\mathfrak{x}}$. Desweiteren ist durch

$$\varphi_t^{\mathfrak{y}} = \mu^{\mathfrak{y}} : M = M_0 \to M_1, (x, 0) + H \mapsto (0, x) + H$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung gegeben. Für $x \in \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}}$ gilt
$x\mu^{\mathfrak{y}} = [(x, 0) + H]\mu^{\mathfrak{y}} = (0, x) + H = (x\mu^{\mathfrak{x}}, 0) + H = x\mu^{\mathfrak{x}}$, weshalb $\mu^{\mathfrak{x}} \subseteq \mu^{\mathfrak{y}}$. Mit (1) folgt $\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{y}} \cap M = M_0 \cap M_1 = \operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}}$. Es sei ι_1 derjenige Homomorphismus, der sich als

kanonische Injektion von M_1 in M' ergibt. Somit ergibt sich folgendes kommutierende Abbildungsdiagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "\pi_0"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\mu^{\mathfrak{x}} \subseteq \mu^{\mathfrak{y}}"] & M_0 = M \arrow[d] \\
M_1 \arrow[r, "\iota_1"'] & M'
\end{tikzcd}$$

2.) M' und M'/M sind frei und $\varphi_i^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{pAut} M'$ für alle $i \in J$. **(2)**

Beweis: Es gilt, daß $M'/D = ((M \times M)/H)/D \cong (M \times M)/(H + D)$
$= (M \times M)/(\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}} \times \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}}) \cong (M/\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}}) \times (M/\operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}})$ frei ist, da $M/\operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}}$ und $M/\operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}}$ freie Moduln sind, wegen $\mu^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{pAut} M$.

Hieraus folgt insbesondere: $M'/M_0 = (M_0 + M_1)/M_0 \cong M_1/D \subseteq M'/D$ ist frei und $M'/M_1 = (M_0 + M_1)/M_1 \cong M_0/D \subseteq M'/D$ ist frei, es ist $\varphi_t^{\mathfrak{y}} = \mu^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{pAut} M'$.

Auch ist $M'/M = M'/M_0$ frei; mit M und M'/M ist auch M' frei.

Für $i \neq t$ gilt $\varphi_i^{\mathfrak{y}} = \varphi_i^{\mathfrak{x}}$. Wegen $\varphi_i^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{pAut} M$ ist $M/\operatorname{Dom} \varphi_i^{\mathfrak{y}}$, $M/\operatorname{Im} \varphi_i^{\mathfrak{y}}$ frei, woraus $M'/\operatorname{Dom} \varphi_i^{\mathfrak{y}}$, $M'/\operatorname{Im} \varphi_i^{\mathfrak{y}}$ frei folgt mit M'/M frei. Also ist auch $\varphi_i^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{pAut} M'$.

3.) $\pi^{\mathfrak{y}} : \varphi_i \mapsto \varphi_i^{\mathfrak{y}}$ für $i \in J$ genügt der U-Eigenschaft bezüglich M'. Dies wird mit Lemma 2.9 bewiesen:

Es seien ein $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ und ein $z \in \mathfrak{p}M'$ mit $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ gegeben. Dann läßt sich φ immer in der kanonischen Form $\varphi = r \cdot \xi_1 \mu^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \mu^{\varepsilon_{k-1}} \xi_k$ mit $0 \neq \varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $r \in R^*$ und $\xi_i \in \langle \mathfrak{F} \setminus \{\mu\} \rangle$ darstellen, wobei $\xi_i \neq 1$ mit Ausnahme von ggf. ξ_1 und ξ_k ist. Es ist $\varphi = 1$ zu zeigen.

Wir betrachten hierzu den **Pfad** $[z]$ des Elements z unter Abbildung $\varphi^{\mathfrak{y}}$:

$$z_0 := z,\ z_1 := rz,\ z_2 := z_1 \xi_1^{\mathfrak{y}},\ z_3 := z_2 (\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_1},\ \cdots,\ z_{2k} := z_{2k-1} \xi_k^{\mathfrak{y}}.$$

Nach Lemma 2.7 besteht $[z]$ nur aus reinen Elementen. wir unterscheiden im folgenden die beiden Fälle $z \in M$ und $z \in M' \setminus M$.

1. Fall: Es sei $z \in M$. Es wird nun gezeigt, daß $z\varphi^{\mathfrak{x}} = z$ gilt, indem man schrittweise in $[z]$ die $\mathfrak{y}$ durch $\mathfrak{x}$ ersetzt.

a) Für $1 < i < k$ gilt $\xi_i \neq 1 \Longrightarrow \xi_i^{\mathfrak{y}} = \xi_i^{\mathfrak{x}}$. Insbesondere gilt $z_{2i-1} \in \operatorname{Dom} \xi_i^{\mathfrak{x}} \subseteq M$ und $z_{2i} \in \operatorname{Im} \xi_i^{\mathfrak{x}} \subseteq M$ für $1 < i < k$.

Auch gilt $z_0 = z_{2k} = z \in M$ und $z_1 = rz \in M$.

Ist $\xi_1 \neq 1$, so gilt $\xi_1^{\mathfrak{y}} = \xi_1^{\mathfrak{x}}$ und $z_2 \in \operatorname{Im} \xi_1^{\mathfrak{x}} \subseteq M$. Ist hingegen $\xi_1 = 1$, so gilt $z_2 = z_1 \xi_1^{\mathfrak{y}} = z_1 \in M$ und $\xi_1^{\mathfrak{y}} = 1^{\mathfrak{y}}$ ist durch $\xi_1^{\mathfrak{x}} = 1^{\mathfrak{x}}$ ersetzbar. Analoges gilt für ξ_k und z_{2k-1}.

Fazit: Der Pfad $[z]$ verläuft innerhalb M. Wir können alle $\xi_i^{\mathfrak{y}}$ durch $\xi_i^{\mathfrak{x}}$ ersetzen, ohne den Verlauf des Pfades $[z]$ zu verändern. **(3)**

b) Gilt $m_1(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon} = m_2$ mit $m_1, m_2 \in M$ und $\varepsilon \in \mathbb{Z}$, so gilt auch $m_1(\mu^{\mathfrak{x}})^{\varepsilon} = m_2$. **(4)**

Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion.

Beweis: O.E. darf man $\varepsilon \geq 0$ voraussetzen; ansonsten ersetze man μ durch μ^{-1}.

Für $\varepsilon = 0$ ist die Aussage offensichtlich, da $(\mu^{\mathfrak{y}})^0 = 1^{\mathfrak{y}}$ und $(\mu^{\mathfrak{x}})^0 = 1^{\mathfrak{x}}$.

Die Aussage gelte für ein $\varepsilon \geq 0$. Es seien $m_1, m_2 \in M$ mit $m_1(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon+1} = m_2$ gegeben. Mit $m_3 := m_1(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon}$ gilt, daß $m_3 \mu^{\mathfrak{y}} = m_2 \in \operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{y}} \cap M = \operatorname{Im} \mu^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow$ $m_3 \in \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{x}} \subseteq M$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt damit $m_1(\mu^{\mathfrak{x}})^{\varepsilon} = m_3$ und $m_3 \mu^{\mathfrak{x}} = m_2$, womit $m_1(\mu^{\mathfrak{x}})^{\varepsilon+1} = m_2$. Die Aussage gilt damit auch für $\varepsilon + 1$.

c) Laut (4) lassen sich auch alle $(\mu^{\mathfrak{y}})^{\varepsilon_i}$ jeweils durch $(\mu^{\mathfrak{x}})^{\varepsilon_i}$ ersetzen, ohne den Pfad $[z]$ zu verändern. Zusammen mit (3) folgt somit $z\varphi^{\mathfrak{x}} = z$. Die U-Eigenschaft von $\pi^{\mathfrak{x}}$ liefert $\varphi = 1$.

2. Fall: Es sei $z \in M' \setminus M$. Dieser Fall wird auf Fall 1 zurückgeführt.

Beweis: Es gilt M'/M frei, also insbesondere $M \subseteq_* M'$. Aus $z = z_0 = z_{2k} \in M' \setminus M$ folgt somit auch $z_1 = rz \in M' \setminus M$. Dies impliziert $\xi_1 = \xi_k = 1$. Somit vereinfacht sich die Darstellung von φ zu $\varphi = r \cdot \mu^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \xi_{k-1} \mu^{\varepsilon_{k-1}}$. **(5)**

Wegen $z \notin M = \operatorname{Dom} \mu^{\mathfrak{y}} = \operatorname{Im} (\mu^{\mathfrak{y}})^{-1}$ folgt $\varepsilon_1 \leq 0$ und $\varepsilon_{k-1} \geq 0$. Hierbei ist $\varepsilon_1 = 0$ aufgrund der Reduziertheit der Darstellung (5) gleichbedeutend mit $\varphi = 1$.

Es sei daher $\varepsilon_1 < 0$. Es ist $z' := z(\mu^{\mathfrak{y}})^{-1} \in M$ wohldefiniert, wobei $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z \Longrightarrow$ $z' \mu^{\mathfrak{y}} \varphi^{\mathfrak{y}} (\mu^{\mathfrak{y}})^{-1} = z' \Longrightarrow z'(\varphi')^{\mathfrak{y}} = z'$ für $\varphi' := \mu\varphi\mu^{-1} \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$. Mit Fall 1 folgt nun $1 = \varphi' = \mu\varphi\mu^{-1} \Longrightarrow \varphi = 1$.

Fazit: In beiden Fällen folgt aus $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$, daß $\varphi = 1$. Mit Lemma 2.9 genügt $\pi^{\mathfrak{y}}$ somit der U-Eigenschaft.

4.) Alle übrigen Bedingungen der Definitionen 2.10 und 2.11 sind offensichtlich erfüllt.

zu (b): Die zu beweisende Aussage folgt direkt aus (a).

Wir definieren hierzu $\mathfrak{x}' := (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}, \pi^{\mathfrak{x}'}) \in \mathfrak{K}$ durch $\pi^{\mathfrak{x}'} := [\pi^{\mathfrak{x}} \cup (\varphi_t, (\varphi_t^{\mathfrak{x}})^{-1})] \setminus (\varphi_t, \varphi_t^{\mathfrak{x}})$. Es gilt also $\varphi_t^{\mathfrak{x}'} = (\varphi_t^{\mathfrak{x}})^{-1}$.

Laut (a) existiert nun ein $\mathfrak{x}' \sqsubseteq \mathfrak{y}' := (M^{\mathfrak{y}'}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}'}, \pi^{\mathfrak{y}'})$, wobei sich $M^{\mathfrak{y}'}$ aus $M^{\mathfrak{x}}$ durch ein geeignetes pushout ergibt, so daß $\mathfrak{F}^{\mathfrak{y}'} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}$, $\varphi_i^{\mathfrak{y}'} = \varphi_i^{\mathfrak{x}}$ für $i \neq t$, $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} = M^{\mathfrak{x}}$, $\operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} \cap M^{\mathfrak{x}} = \operatorname{Im} (\varphi_t^{\mathfrak{x}})^{-1}$ und $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} + \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} = M^{\mathfrak{y}'}$.

Setzt man $\mathfrak{y} := (M^{\mathfrak{y}'}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}'}, \pi^{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{K}$ mit $\pi^{\mathfrak{y}} := [\pi^{\mathfrak{y}'} \cup (\varphi_t, (\varphi_t^{\mathfrak{y}'})^{-1})] \setminus (\varphi_t, \varphi_t^{\mathfrak{y}'})$, so gilt: $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y}$, wobei sich $M^{\mathfrak{y}'}$ aus $M^{\mathfrak{x}}$ durch ein geeignetes pushout ergibt, so daß $\mathfrak{F}^{\mathfrak{y}'} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{x}}$, $\varphi_i^{\mathfrak{y}} = \varphi_i^{\mathfrak{x}}$ für $i \neq t$, $\operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = \operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} = M^{\mathfrak{x}}$, $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} \cap M^{\mathfrak{x}} = \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}'} \cap M^{\mathfrak{x}} = \operatorname{Im} (\varphi_t^{\mathfrak{x}})^{-1} = \operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{x}}$ und $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{y}} + \operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{y}'}$. $\square$

Entsteht $\mathfrak{y}$ aus $\mathfrak{x}$ durch ein Dom- bzw. Im-pushout von φ_t, so gilt immer $\mathfrak{F}^{\mathfrak{x}} = \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}$ und $|M^{\mathfrak{x}}| \leq |M^{\mathfrak{y}}| = |(M^{\mathfrak{x}} \times M^{\mathfrak{x}})/H| \leq |M^{\mathfrak{x}}|^2 = |M^{\mathfrak{x}}| \Longrightarrow |M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{y}}|$. Führt man insbesondere ein Dom-pushout von φ_t mit $\operatorname{Dom} \varphi_t^{\mathfrak{x}} \neq M^{\mathfrak{x}}$ bzw. ein Im-pushout von φ_t mit $\operatorname{Im} \varphi_t^{\mathfrak{x}} \neq M^{\mathfrak{x}}$ durch, so gilt sogar $M^{\mathfrak{x}} \neq M^{\mathfrak{y}} \Longrightarrow M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}} \neq 0 \Longrightarrow |M^{\mathfrak{y}} \setminus M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$. Näheres zum Rechnen mit Kardinalzahlen siehe in [2, Chapter III, S. 81ff].

Um Lemma 2.12 und Lemma 2.14 iteriert anwenden zu können benötigen wir noch ein zusätzliches Lemma über Ketten von Tripeln $\mathfrak{x}_j \in \mathfrak{K}$.

Gegeben seien ein $\alpha \in \mathrm{LORD}$ und Elemente $\mathfrak{x}^j = (M^j, \mathfrak{F}^j, \pi^j) \in \mathfrak{K}$ für alle $j \in \alpha$. Es sei J^j jeweils die Indexmenge von $\mathfrak{F}^j$.

Gilt $\mathfrak{x}^\beta \subseteq \mathfrak{x}^\gamma$ (bzw. $\mathfrak{x}^\beta \sqsubseteq \mathfrak{x}^\gamma$) für alle $\beta \leq \gamma < \alpha$, so bezeichnen wir $(\mathfrak{x}^j)_{j\in\alpha}$ als eine **Kette** in $(\mathfrak{K}, \subseteq)$ (bzw. in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$). Gilt außerdem $\mathfrak{x}^\beta = \bigcup_{j\in\beta} \mathfrak{x}^j$ für jedes $\beta \in \alpha \cap \mathrm{LORD}$, so ist die Kette **stetig**. Das **Supremum** $\bigcup_{j\in\beta} \mathfrak{x}^j = (M, \mathfrak{F}, \pi)$ ist komponentenweise definiert durch $M := \bigcup_{j\in\beta} M^j$, $\mathfrak{F} := \bigcup_{j\in\beta} \mathfrak{F}^j$ mit Indexmenge $J := \bigcup_{j\in\beta} J^j$ und $\pi(\varphi_t) := \bigcup_{i(t)<j<\beta} \pi^j(\varphi_t)$ für jedes $t \in J$, wobei ein $i(t) \in \beta$ mit $t \in J^{i(t)}$ zu wählen ist.

Lemma 2.15 (Bilden des Supremum)

(a) Gegeben seien ein $\alpha \in$ LORD und eine stetige Kette $(\mathfrak{x}^j)_{j\in\alpha} = (M^j, \mathfrak{F}^j, \pi^j)_{j\in\alpha}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$, die durch iteriertes Hinzufügen von Baby-Automorphismen und pushout-Konstruktionen erzeugt wurde. Dann gilt $\mathfrak{x} := \bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{x}^j \sqsubseteq \mathfrak{x}$ für alle $j \in \alpha$.

(b) Gegeben seien ein $\alpha \in$ LORD und eine stetige Kette $(\mathfrak{x}^j)_{j\in\alpha} = (M^j, \mathfrak{F}^j, \pi^j)_{j\in\alpha}$ in

$(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ *mit* $\pi^j(\mathfrak{F}^j) \subseteq \operatorname{Aut} M^j$ *für alle* $j \in \alpha$. *Dann gilt* $\mathfrak{x} := \bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j \in \mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{x}^j \sqsubseteq \mathfrak{x}$ *für alle* $j \in \alpha$.

Beweis:

zu (a): Wir definieren $\mathfrak{x} = \bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j = (M, \mathfrak{F}, \pi)$ wie oben und setzen $\varphi^j := \pi^j(\varphi)$ für jedes $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F}^j \rangle$, $j \in \alpha$.

1.) M und M/M^β sind frei für alle $\beta < \alpha$. **(1)**

Beweis: Für $j \in \alpha$ folgt aus $\mathfrak{x}^j \in \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{x}^j \sqsubseteq \mathfrak{x}^{j+1}$, daß $M^j \sqsubseteq M^{j+1}$ frei. Es gilt also $M^{j+1} = M^j \oplus D^j$ mit $D^j \subseteq M^{j+1}$ frei. Es folgt $M = \bigcup_{j\in\alpha} M^j = M^0 \oplus \bigoplus_{j\in\alpha} D^j$ und $M/M^\beta = \bigoplus_{\beta\leq j<\alpha} D^j$ ist frei.

2.) Für jedes $t \in J$ ist $\varphi_t^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{pAut} M$.

Beweis: Für $\varphi_t^{\mathfrak{x}} := \bigcup_{i(t)<j<\alpha} \varphi_t^j$ betrachten wir die stetige Kette $(\varphi_t^j)_{i(t)<j<\alpha}$ von Graphen.

1. Fall: Die Kette $(\varphi_t^j)_{i(t)<j<\alpha}$ wird **stationär**, d.h. $\varphi_t^{\mathfrak{x}} = \varphi_t^\beta$ für ein $\beta < \alpha$.

Dann ist M/M^β frei laut (1) und $M^\beta/\operatorname{Dom}\varphi_t^\beta$ ist frei wegen $\varphi_t^\beta \in \operatorname{pAut}(M^\beta)$. Es folgt, daß $M/\operatorname{Dom}\varphi_t^{\mathfrak{x}} = M/\operatorname{Dom}\varphi_t^\beta$ frei ist.

2. Fall: Die Kette $(\varphi_t^j)_{i(t)<j<\alpha}$ wird nicht stationär.

O.E. gelte $\varphi_t^j \neq \varphi_t^{j+1}$ für alle $j \in \alpha$; ansonsten wähle man eine geeignete stetige Teilkette, die dann aus mindestens $\operatorname{cf}(\alpha)$ Elementen besteht. Diese Kette besteht nur aus pushout-Konstruktionen von φ_t.

a) Aus Lemma 2.14 folgt $N^j := M^j \cap \operatorname{Dom}\varphi_t^{\mathfrak{x}} \in \{M^j, \operatorname{Dom}\varphi_t^j\}$ frei. **(2)**

Hierbei ist $N^j = \operatorname{Dom}\varphi_t^j \neq M^j$ nur möglich, falls ab $\mathfrak{x}^j$ nur noch Im-pushouts von φ_t durchgeführt werden. Aus (2) folgt M^j/N^j frei für alle $j \in \alpha$.

b) Geht $\mathfrak{x}^{j+1}$ aus $\mathfrak{x}^j$ durch ein Dom-pushout von φ_t hervor, so gilt $M^j + \operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1} = M^j \sqsubseteq M^{j+1}$. Geht $\mathfrak{x}^{j+1}$ aus $\mathfrak{x}^j$ hingegen durch ein Im-pushout von φ_t hervor, so gilt $M^j + \operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1} = \operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1} + \operatorname{Im}\varphi_t^{j+1} = M^{j+1}$ mit Lemma 2.14.

Zusammenfassend folgt mit (2), daß

$M^{j+1}/(M^j + N^{j+1}) \in \{M^{j+1}/M^j, M^{j+1}/(M^j + \operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1})\}$ immer frei ist. **(3)**

c) Mit M^{j+1}/M^j und $M^j/\operatorname{Dom}\varphi_t^j$ ist auch $\operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1}/\operatorname{Dom}\varphi_t^j \subseteq M^{j+1}/\operatorname{Dom}\varphi_t^j$ frei. Gilt $N^j = M^j \neq \operatorname{Dom}\varphi_t^j$ und $N^{j+1} = \operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1} \neq M^{j+1}$, so enstand $\mathfrak{x}^{j+1}$ aus $\mathfrak{x}^j$ durch ein Dom-pushout von φ_t, woraus $\operatorname{Dom}\varphi_t^{j+1} = M^j$ und $N^{j+1}/N^j = M^j/M^j = 0$ frei folgt.

Zusammenfassend folgt mit (2), daß

$N^{j+1}/N^j \in \{M^{j+1}/M^j, \mathrm{Dom}\,\varphi_t^{j+1}/M^j, M^{j+1}/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^j, \mathrm{Dom}\,\varphi_t^{j+1}/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^j\}$

immer frei ist. **(4)**

d) Aus (2), (3) und (4) folgt: Für die Kette $(N^j)_{i(t)<j<\alpha}$ mit $N^j = M^j \cap \mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$ gilt $N^j \sqsubseteq M^j$, $M^j + N^{j+1} \sqsubseteq M^{j+1}$, $N^j \sqsubseteq N^{j+1}$ frei und $M^j \cap N^{j+1} = N^j$; dies erlaubt eine rekursive Definition einer Basis $B := \bigcup_{i(t)<j<\alpha} B^j$ des freien R-Moduls M mit $\langle B^j \rangle = M^j$ und $\langle N^j \cap B^j \rangle = N^j$. Insbesondere folgt $N = \langle N \cap B \rangle$ für $N := \bigcup_{i(t)<j<\alpha} N^j = \mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$, also $M/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}} \cong \langle (M \setminus \mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}) \cap B \rangle$ frei.

Da $M/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$ frei ist, folgt die Freiheit von $M/\mathrm{Im}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$, indem man φ_t durch φ_t^{-1} ersetzt.

3.) π besitzt die U-Eigenschaft bezüglich M.

Beweis: Sind ein $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ und ein $z \in \mathfrak{p}M$ mit $z\varphi^{\mathfrak{x}} = z$ gegeben, so gibt es eine Zwischenstufe $\beta \in \alpha$, auf der bereits $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F}^\beta \rangle$, $z \in \mathfrak{p}M^\beta \cap \mathrm{Dom}\,\varphi^\beta$ und $z\varphi^\beta = z$ gilt. Aus der U-Eigenschaft von π^β folgt $\varphi = 1$, nach Lemma 2.9 genügt π der U-Eigenschaft.

4.) Alle übrigen Bedingungen der Definitionen 2.10 und 2.11 sind offensichtlich erfüllt.

zu (b): Wir definieren $\mathfrak{x} = \bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j = (M, \mathfrak{F}, \pi)$ wie oben und setzen $\varphi^j := \pi^j(\varphi)$ für jedes $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F}^j \rangle$, $j \in \alpha$.

1.) Für jedes $t \in J$ ist $\varphi_t^{\mathfrak{x}} \in \mathrm{pAut}\,M$.

Beweis: Für $\varphi_t^{\mathfrak{x}} := \bigcup_{i(t)<j<\alpha} \varphi_t^j$ gilt $\mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}} = \bigcup_{i(t)<j<\alpha} \mathrm{Dom}\,\varphi_t^j = \bigcup_{i(t)<j<\alpha} M^j = M$ wegen $\varphi_t^j \in \mathrm{Aut}\,M^j$. Analog folgt $\mathrm{Im}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}} = M$ und es folgt $\varphi_t^{\mathfrak{x}} \in \mathrm{Aut}\,M \subseteq \mathrm{pAut}\,M$.

2.) Alle übrigen Bedingungen der Definitionen 2.10 und 2.11 beweist man analog zu (a). $\square$

Man beachte, daß für eine stetige Kette $(\mathfrak{x}^j)_{j\in\alpha} = (M^j, \mathfrak{F}^j, \pi^j)_{j\in\alpha}$ in $(\mathfrak{K}, \subseteq)$ im allgemeinen $\mathfrak{x} = \bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j = (M, \mathfrak{F}, \pi) \notin \mathfrak{K}$ gilt. Insbesondere ist M nicht frei.

Die erste unendliche Ordinalzahl sei mit ω bezeichnet.

Mit den bereitgestellten Konstruktionselementen läßt sich nun die Hauptaussage dieses Kapitels beweisen.

Satz 2.16 (Freie UT-Konstruktion)
Gegeben sei ein $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) \in \mathfrak{K}$. *Dann existiert ein* $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{x}' = (M', \mathfrak{F}', \pi') \in \mathfrak{K}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*
(i) $\pi'(\mathfrak{F}') \subseteq \operatorname{Aut} M'$.
(ii) $\pi'(R^* \times \langle \mathfrak{F}' \rangle)$ *operiert scharf transitiv auf* $\mathfrak{p}M'$.
(iii) $|M'| = |M|$.

Beweis: Für $M = 0$ erfüllt offensichtlich $\mathfrak{x}' := \mathfrak{x}$ alle gewünschten Eigenschaften. Es sei daher $M \neq 0$. Es wird rekursiv eine Kette $(\mathfrak{x}_n)_{n\in\omega}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ konstruiert. Setze $\mathfrak{x}_0 := \mathfrak{x}$.

1. Schritt: Man konstruiere durch rekursives Hinzufügen von Baby-Automorphismen eine Kette $(\mathfrak{x}_0^i)_{i\in|M|\cdot|M|}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ derart, daß $\mathfrak{x}_0^0 := \mathfrak{x}_0$ und $\pi_1(R^* \times \langle \mathfrak{F}_1 \rangle) \subseteq \operatorname{pAut} M_1$ transitiv auf $\mathfrak{p}M_1$ agiert für $\mathfrak{x}_0 \sqsubseteq \mathfrak{x}_1 := \bigcup_{i\in|M|\cdot|M|} \mathfrak{x}_0^i = (M_1, \mathfrak{F}_1, \pi_1) \in \mathfrak{K}$. Insbesondere gilt $M_1 = M_0 = M \Longrightarrow |M_1| = |M|$. Im allgemeinen ist $\pi_1(\mathfrak{F}_1) \not\subseteq \operatorname{Aut} M_1$.
2. Schritt: Man konstruiere durch rekursives Anwenden von Dom- und Im-pushouts eine Kette $(\mathfrak{x}_1^i)_{i\in|M|\cdot\omega}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ derart, daß $\mathfrak{x}_1^0 := \mathfrak{x}_1$ und $\pi_2(\mathfrak{F}_2) \subseteq \operatorname{Aut} M_2$ für
$\mathfrak{x}_1 \sqsubseteq \mathfrak{x}_2 := \bigcup_{i\in|M|\cdot\omega} \mathfrak{x}_1^i = (M_2, \mathfrak{F}_2, \pi_2) \in \mathfrak{K}$ ist. Insbesondere gilt $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1$ und $|M| \leq |M_2| \leq \aleph_0 \cdot |M|^2 = |M| \Longrightarrow |M_2| = |M|$.
Im allgemeinen operiert $\pi_2(R^* \times \langle \mathfrak{F}_2 \rangle)$ nicht scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M_2$.

Die Kette $(\mathfrak{x}_n)_{n\in\omega}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ entstehe nun durch wiederholtes Anwenden von Schritt 1 und Schritt 2. Setze $\mathfrak{x}' := \bigcup_{n\in\omega} \mathfrak{x}_n \in \mathfrak{K}$. Eigenschaft (i) des Satzes folgt nun direkt aus der Anwendung von Schritt 2. Aus der Anwendung von Schritt 1 folgt die Transitivität, aus der U-Eigenschaft von π' die scharfe Transitivität von $\pi'(R^* \times \langle \mathfrak{F}' \rangle)$ auf $\mathfrak{p}M'$. Offensichtlich ist $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{x}'$ und $|M| \leq |M'| \leq \aleph_0 \cdot |M| = |M| \Longrightarrow |M'| = |M|$. □

Satz 2.16 legt die Definition einer neuen Familie $\mathfrak{A}$ von Tripeln nahe.

Definition 2.17 *Es bezeichne* $\mathfrak{A}$ *die Familie aller Tripel* $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) \in \mathfrak{K}$ *mit* $\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \operatorname{Aut} M$.

Laut Lemma 2.15 ist $\bigcup_{j\in\alpha} \mathfrak{x}^j \in \mathfrak{A}$ für jede stetige Kette $(\mathfrak{x}^j)_{j\in\alpha}$ in $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$.

3 Die Hauptkonstruktion

Im folgenden wird die Hauptkonstruktion vorgestellt, die den für Hauptsatz 1.3 benötigten Modul liefert. Zudem werden einige einfache Eigenschaften dieses Moduls bewiesen. Zunächst sind hierzu allerdings noch einige neue Konstruktionselemente nötig.

Für eine absolut freie Gruppe F und einen Ring S bezeichne SF den Gruppenring aller Polynome mit Monomen aus F und Koeffizienten aus S. Es sei $S^* \times F$ die Gruppe aller Monome aus F mit Koeffizienten aus S^*.
Für einen rechten SF-Modul M identifizieren wir jedes $f \in SF$ mit dem von ihm kanonisch induzierten S-Modulendomorphismus $m \mapsto mf$ auf M.

Lemma 3.1 *Es seien R ein PID und F eine absolut freie Gruppe. Dann gilt:*
(a) RF ist nullteilerfrei.
(b) $(RF)^* = R^* \times F$.
(c) 0 und 1 sind die einzigen Idempotenten von RF.

Beweis:
zu (a) und (b): Der Beweis wird hier nur skizziert.
Laut [12] läßt sich F derart linear anordnen, daß die Anordnung unter rechtsseitiger Multiplikation erhalten bleibt. Mit [13, Lemma 45.2 und 45.3, S. 276] ist RF nullteilerfrei und besitzt nur triviale Einheiten. Man beachte hierbei insbesondere, daß R als ein PID nullteilerfrei ist.
zu (c): Es sei ein $f \in RF$ mit $f^2 = f$ gegeben. Mit (a) folgt $f^2 = f \iff$
$f(f-1) = 0 \iff f \in \{0, 1\}$. □

Im folgenden wird der Gruppenring RF auch als linker R-Modul und als rechter RF-Modul aufgefaßt.

Lemma 3.2 (RF-Konstruktion)
Gegeben sei ein $\mathfrak{x} = (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{x}}) \in \mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{F} = \{\varphi_t | t \in J\}$. Für jedes $t \in J$ definiere

$\varphi_t^{\mathfrak{y}} := \varphi_t^{\mathfrak{x}} \times \varphi_t \in \mathrm{pAut}\, M^{\mathfrak{x}} \times \mathrm{Aut}\, R\langle\mathfrak{F}\rangle$. *Setze* $M^{\mathfrak{y}} := M^{\mathfrak{x}} \times R\langle\mathfrak{F}\rangle$ *und* $\pi^{\mathfrak{y}} := \bigcup_{t\in J}(\varphi_t, \varphi_t^{\mathfrak{y}})$ *als Graph. Dann gilt* $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y} := (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{K}$, *wobei man* $M^{\mathfrak{x}}$ *mit* $(M^{\mathfrak{x}}, 0) \subseteq M^{\mathfrak{y}}$ *identifiziert.*

Beweis:

1.) $M^{\mathfrak{y}}$ und $M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}}$ sind frei.

Beweis: Als linker R-Modul ist offensichtlich $M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}} \cong R\langle\mathfrak{F}\rangle \cong \bigoplus_{m\in\langle\mathfrak{F}\rangle} R\cdot m$ frei. Mit $M^{\mathfrak{x}}$ und $M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}}$ ist auch $M^{\mathfrak{y}}$ frei.

2.) Für jedes $t \in J$ gilt $\varphi_t^{\mathfrak{y}} \in \mathrm{pAut}\, M^{\mathfrak{y}}$.

Beweis: Für jedes $t \in J$ ist $\varphi_t^{\mathfrak{y}}$ ein partieller Automorphismus mit $M^{\mathfrak{y}}/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{y}} \cong M^{\mathfrak{x}}/\mathrm{Dom}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$ frei und $M^{\mathfrak{y}}/\mathrm{Im}\,\varphi_t^{\mathfrak{y}} \cong M^{\mathfrak{x}}/\mathrm{Im}\,\varphi_t^{\mathfrak{x}}$ frei.

3.) $\pi^{\mathfrak{y}}$ genügt der U-Eigenschaft auf $M^{\mathfrak{y}}$.

Beweis: Es seien ein $\varphi \in R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle$ und ein $z = (z_1, z_2) \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{y}}$ mit $z_1 \in M^{\mathfrak{x}},\ z_2 \in R\langle\mathfrak{F}\rangle$ und $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ gegeben. Aus $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ folgt $z_1\varphi^{\mathfrak{x}} = z_1$ und $z_2\varphi = z_2$.

1. Fall: Ist $z_1 \neq 0$, so existieren ein $z_1' \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{x}}$ und ein $0 \neq r \in R$ mit $rz_1' = z_1$. Es folgt $z_1\varphi^{\mathfrak{x}} = z_1 \Longrightarrow rz_1'\varphi^{\mathfrak{x}} = rz_1' \Longrightarrow z_1'\varphi^{\mathfrak{x}} = z_1' \Longrightarrow \varphi = 1$ aus der U-Eigenschaft von $\pi^{\mathfrak{x}}$.

2. Fall: Es ist $z_1 = 0$. Aus $z \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{y}}$ folgt $z_2 \neq 0$, weshalb $z_2\varphi = z_2 \Longrightarrow z_2(\varphi - 1) = 0 \Longrightarrow \varphi = 1$ aus der Nullteilerfreiheit von $R\langle\mathfrak{F}\rangle$ folgt.

Es folgt also jeweils $\varphi = 1$, nach Lemma 2.9 genügt $\pi^{\mathfrak{y}}$ der U-Eigenschaft.

4.) Alle übrigen Bedingungen der Definitionen 2.10 und 2.11 sind offensichtlich erfüllt. □

Insbesondere läßt sich bei der RF-Konstruktion $M^{\mathfrak{y}} = M^{\mathfrak{x}} \oplus eR\langle\mathfrak{F}\rangle$ mit $e := (0,1)$ schreiben, wobei durch $e \cdot r = r \cdot e$ für $r \in R$ der rechte freie $R\langle\mathfrak{F}\rangle$-Modul $eR\langle\mathfrak{F}\rangle$ als linker R-Modul interpretiert wird. Es gilt $\varphi_t^{\mathfrak{y}} \restriction eR\langle\mathfrak{F}\rangle = \varphi_t$.

Für das folgende Konstruktionselement, die Stufen-Konstruktion, ist eine kurze Einführung in p-adische Vervollständigungen von R-Moduln notwendig.

Es sei R ein PID mit $R^* \neq R \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathrm{P}(R) \neq \emptyset$ und p sei ein Primelement von R. Sei M ein p-reduzierter R-Modul. Dann gilt $\bigcap_{i\in\omega} p^iM = 0$. Damit ist insbesondere $\{p^iM | i \in \omega\}$ eine Umgebungsbasis der 0, die eine Hausdorffsche Topologie auf M definiert, die sogenannte **p-adische Topologie**. Bezüglich dieser Topologie lassen sich

Begriffe wie Konvergenz und Cauchyfolge wie gewohnt definieren. Im allgemeinen sind Cauchyfolgen in M nicht konvergent.
Zwei Cauchyfolgen $(a_i)_{i\in\omega}$ und $(b_i)_{i\in\omega}$ heißen äquivalent, falls $(a_i - b_i)_{i\in\omega}$ gegen 0 konvergiert. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Cauchyfolgen in M gegeben. Ihre Äquivalenzklassen bilden in kanonischer Weise einen R-Modul, die **p-adische Vervollständigung** $\widehat{M_p}$. Der Modul $\widehat{M_p}$ ist **vollständig** bezüglich seiner p-adischen Topologie, d.h. jede Cauchyfolge in $\widehat{M_p}$ ist konvergent.

Für einen p-reduzierten R-Modul M hat $\widehat{M_p}$ desweiteren die folgenden elementaren Eigenschaften:
Der Modul M läßt sich durch den Homomorphismus $m \to (m)_{i\in\omega}$ in $\widehat{M_p}$ einbetten und ist dicht in $\widehat{M_p}$. Ist M' ein weiterer vollständiger R-Modul und $\varphi : M \to M'$ ein Homomorphismus, so läßt sich φ eindeutig zu einem Homomorphismus $\widehat{\varphi} : \widehat{M_p} \to M'$ fortsetzen.
Die p-adische Vervollständigung $\widehat{M_p}$ ist ein $\widehat{R}_p$-Modul. Ist M zudem ein S-Modul bezüglich eines Ringes S, so ist $\widehat{M_p}$ ein $\widehat{S}_p$-Modul.
Es ist $M \subseteq_{*p} \widehat{M_p}$ p-rein, d.h. für alle $m' \in M$, $\widehat{m} \in \widehat{M_p}$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt aus
$p^n\widehat{m} = m'$, daß $p^n m = m'$ für ein $m \in M$. Die p-adische Vervollständigung $\widehat{M_p}$ ist p-reduziert. Ist q ein von p verschiedenes Primelement von R, so ist $\widehat{M_p}$ ein q-teilbarer R-Modul.
Ist R-Modul M torsionsfrei, so ist auch $\widehat{M_p}$ torsionsfrei.
Näheres zur p-adischen Vervollständigung siehe in [6, Kapitel 13, Band 1, S. 65ff].

Es folgt noch ein für Anwendungen nützliches Korollar.

Korollar 3.3 *Es seien M und M' zwei p-reduzierte R-Moduln derart, daß $M \subseteq M'$ und M'/M p-reduziert ist. Ist $(m_i)_{i\in\omega}$ eine Folge in M, die in der p-adischen Topologie auf M' gegen einen Grenzwert $m' \in M'$ konvergiert, so gilt $m' \in M$. Also ist M in M' p-adisch abgeschlossen.*

Beweis: Die Folge $(m_i)_{i\in\omega}$ sei soweit ausgedünnt, daß $(m' - m_i) \in p^i M'$ für alle $i \in \omega$ gilt. Es folgt $m' + M = (m' - m_i) + M \in p^i(M'/M)$ für alle $i \in \omega$, somit

$m' + M = M \Longrightarrow m' \in M$, da M'/M p-reduziert ist. $\square$

Ist ein Tripel $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) \in \mathfrak{A}$ gegeben, so läßt sich der Gruppenhomomorphismus $\pi : R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle \to \operatorname{Aut} M$ zu einem Ringhomomorphismus $\pi : R\langle \mathfrak{F} \rangle \to \operatorname{End} M$ fortsetzen durch $\pi(f) = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i^{\mathfrak{x}}$ für $f = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in R\langle \mathfrak{F} \rangle$ mit $r_i \in R$, $\mu_i \in \langle \mathfrak{F} \rangle$, $n \in \omega$.
Im folgenden sei p immer ein Primelement des PID R mit $R \neq \widehat{R}_p$.

Stufen-Lemma 3.4 (Stufen-Konstruktion)
Es sei eine stetige Kette $(\mathfrak{x}_i)_{i \in \omega}$ in $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$ mit $\mathfrak{x}_i = (M_i, \mathfrak{F}_i, \pi_i)$ und $M_i \neq 0$, $\mathfrak{F}_i \neq \emptyset$, $M_{i+1} = M_i \oplus D_i$ für alle $i \in \omega$ gegeben. Für jedes $i \in \omega$ sei $R\langle \mathfrak{F}_i \rangle \cong e_i R\langle \mathfrak{F}_i \rangle \sqsubseteq D_i$ mit $\pi_{i+1}(\varphi_t) \restriction e_i R\langle \mathfrak{F}_i \rangle = \varphi_t$ für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}_i$. Desweiteren sei für das Supremum $\mathfrak{x} := \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{x}_i = (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{x}})$ ein $\eta^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{End} M^{\mathfrak{x}} \setminus \pi^{\mathfrak{x}}(R\langle \mathfrak{F} \rangle)$ gegeben.
Dann existiert ein $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y} = (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) Es ist $M^{\mathfrak{y}} \subseteq_{*p} (\widehat{M^{\mathfrak{x}}})_p$. Für $\varphi_t \in \mathfrak{F}$ ist $\varphi_t^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{Aut} M^{\mathfrak{y}}$ jeweils die auf $M^{\mathfrak{y}} \subseteq (\widehat{M^{\mathfrak{x}}})_p$ eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\varphi_t^{\mathfrak{x}}$.
(ii) Es sei $\eta^{\mathfrak{y}}$ die auf $M^{\mathfrak{y}} \subseteq (\widehat{M^{\mathfrak{x}}})_p$ eindeutig bestimmte Fortsetzung von $\eta^{\mathfrak{x}}$. Dann gilt $y\eta^{\mathfrak{y}} \notin M^{\mathfrak{y}}$ für ein $y \in M^{\mathfrak{y}}$, d.h. $\eta^{\mathfrak{x}}$ ist nicht auf $M^{\mathfrak{y}}$ als Endomorphismus fortsetzbar.
(iii) Es gilt $|M^{\mathfrak{y}}| = |M^{\mathfrak{y}} \setminus M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$ und $\mathfrak{x}_i \sqsubseteq \mathfrak{y}$ für alle $i \in \omega$.
(iv) Es ist $M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}} \neq 0$ p-teilbar, insbesondere $\mathfrak{x} \not\sqsubseteq \mathfrak{y}$.

Der Beweis des Stufen-Lemmas wird in Kapitel 4 nachgeholt.
Damit ist nun das Rüstzeug vorhanden, um die **Hauptkonstruktion** für den Beweis von Hauptsatz 1.3 zu beschreiben:

Gegeben seien eine reguläre, nicht schwach kompakte Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ und ein PID R mit $|R| < \kappa$ und $R \neq \widehat{R}_p$ für ein $p \in \mathrm{P}(R)$.
Es sei M eine Menge mit $|M| = \kappa$.
Desweiteren sei mit $M = \bigcup_{\alpha < \kappa} M_\alpha$ eine κ-Filtration von M gegeben, wobei o.E. $|M_0| = |M_1 \setminus M_0| = |R|$ und $|M_\alpha| = |M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha| = |R||\alpha|$ für $0 < \alpha < \kappa$ sei. **(*)**
Es sei $E \subseteq \kappa^o = \{\alpha \in \kappa | \operatorname{cf}(\alpha) = \aleph_0\}$ eine nicht reflexive, stationäre Menge. Mit $\{\Phi_\alpha : M_\alpha \to M_\alpha | \ \alpha \in E\}$ sei ein System von Jensen-Funktionen zur κ-Filtration

$M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ gegeben.

Das Ziel des Beweises besteht nun darin, induktiv den Mengen M_α Modulstruktur derart zuzuweisen, daß eine stetige Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ mit $\mathfrak{x}_\alpha = (M_\alpha, \mathfrak{F}_\alpha, \pi_\alpha)$ entsteht. M_α ist hierbei jeweils ein linker R-Modul und ein rechter $\operatorname{End} M_\alpha$-Modul.
Der Abschluß $M := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ dieser stetigen Kette, soll als linker R-Modul dann dem Hauptsatz 1.3 genügen.
Genauer gesagt führen wir die folgende induktive Konstruktion durch:

Induktionsbeginn:
Setze $\mathfrak{x}_0 := (M_0, \mathfrak{F}_0, \pi_0) \in \mathfrak{A}$ mit $M_0 := R \oplus R$, $\mathfrak{F}_0 := \emptyset$ und $\pi_0 := \emptyset$.

Induktionsschritt:
Fall 1: $\alpha = \beta + 1,\ \beta \notin E$.

Bilde $\mathfrak{x}_\beta \sqsubseteq \mathfrak{y}_\beta := (M'_\beta, \mathfrak{F}_\beta, \pi'_\beta) \in \mathfrak{K}$ mittels RF-Konstruktion, danach $\mathfrak{y}_\beta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{A}$ mittels freier UT-Konstruktion.

Fall 2: $\alpha = \beta + 1,\ \beta \in E$.

- Ist die Jensen-Funktion $\Phi_\beta : M_\beta \to M_\beta$ ein Modulhomomorphismus aus $\operatorname{End} M_\beta \setminus \pi_\beta(R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle)$, so konstruieren wir $\mathfrak{x}_\beta \subseteq \mathfrak{x}_\alpha$ mit dem Stufen-Lemma 3.4 derart, daß $y\Phi_\alpha \notin M_\alpha$ für ein $y \in M_\alpha$, wobei Φ_α die eindeutig bestimmte Fortsetzung von Φ_β auf M_α ist.
  Näheres hierzu siehe im Beweis von Lemma 3.5, Fall 2.
- Ansonsten verfahre wie in Fall 1.

Fall 3: $\alpha \in \mathrm{LORD} \cap \kappa$.

Setze $\mathfrak{x}_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathfrak{x}_\beta$.

Es folgen zunächst einige einfache Eigenschaften der so konstruierten Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$.

Lemma 3.5 *Es sei* $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *durch obige Konstruktion gegeben.*

(a) $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *ist eine wohldefinierte stetige Kette in* $(\mathfrak{A}, \subseteq)$.

(b) Für $\beta \leq \alpha < \kappa$, $\beta \notin E$ *gilt* $\mathfrak{x}_\beta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$.

(c) Es gilt $|M_0| = |M_1 \setminus M_0| = |R|$ *und* $|M_\alpha| = |M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha| = |R||\alpha|$ *für* $0 < \alpha < \kappa$, *d.h.* $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *genügt der Bedingung (*) an die* κ*-Filtration* $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$.

Beweis: Der Beweis der Aussagen (a), (b) und (c) erfolgt simultan durch transfinite Induktion über alle Ordinalzahlen $\alpha < \kappa$.

Für $\alpha = 0$ sind die Aussagen (a), (b) und (c) offensichtlich.

Es seien nun $0 < \alpha < \kappa$ und die Aussagen (a), (b) und (c) für alle $\alpha' < \alpha$ erfüllt. Wir unterscheiden im folgenden die Fälle 1, 2 und 3 der Konstruktion.

Fall 1: $\alpha = \beta + 1,\ \beta \notin E$.

Wegen $\mathfrak{x}_\beta \sqsubseteq \mathfrak{y}_\beta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{A}$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{x}_\gamma \subseteq \mathfrak{x}_\alpha$ für alle $\gamma \leq \alpha$ und $\mathfrak{x}_\delta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$ für alle $\delta \leq \alpha$, $\delta \notin E$.

Für die RF-Konstruktion $M'_\beta = M_\beta \oplus R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ gilt $|M_\beta| \leq |M'_\beta| = |M_\beta| \cdot |R| \cdot |\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle| = |M_\beta| \cdot |\mathfrak{F}_\beta| \leq |M_\beta|^2 = |M_\beta| \Longrightarrow |M'_\beta| = |M_\beta|$ unter Beachtung von $\aleph_0 \leq |R| \leq |M_\beta|$ und $|\mathfrak{F}_\beta| \leq |M_\beta|$. Für die anschließende freie UT-Konstruktion gilt daher $|M_\alpha| = |M'_\beta| = |M_\beta| = |R||\beta| = |R||\alpha|$.

Im Rahmen der an die RF-Konstruktion anschließenden UT-Konstruktion wird immer ein Baby-Automorphismus mittels Dom- und Im-pushouts zu einem Automorphismus erweitert. Hieraus folgt $|M_\alpha \setminus M_\beta| = |M_\beta| = |R||\beta|$.

Fall 2: $\alpha = \beta + 1,\ \beta \in E$.

Ist $\Phi_\beta \notin \operatorname{End} M_\beta \setminus \pi_\beta(R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle)$, so folgt die Richtigkeit von (a), (b) und (c) wie im Fall 1. Es sei daher $\Phi_\beta \in \operatorname{End} M_\beta \setminus \pi_\beta(R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle)$.

Aus $\beta \in E \subseteq \kappa^o$ folgt die Existenz einer aufsteigenden Folge $(\beta_i)_{i\in\omega}$ von Ordinalzahlen $0 < \beta_i \notin E \subseteq \mathrm{LORD}$ mit $\bigcup_{i\in\omega} \beta_i = \beta$. Laut Induktionsvoraussetzung definiert $(\beta_i)_{i\in\omega}$ die stetige Kette $(\mathfrak{x}_{\beta_i})_{i\in\omega}$ in $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$ mit $\bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{x}_{\beta_i} = \mathfrak{x}_\beta$. Desweiteren folgt aus der Konstruktion $\mathfrak{x}_{\beta_i} \sqsubseteq \mathfrak{y}_{\beta_i} \sqsubseteq \mathfrak{x}_{\beta_i+1} \sqsubseteq \mathfrak{x}_{\beta_{(i+1)}}$ für alle $i \in \omega$, wobei sich $M'_{\beta_i} = M_{\beta_i} \oplus e_i R\langle\mathfrak{F}_{\beta_i}\rangle \sqsubseteq M_{\beta_{(i+1)}}$ mit $\varphi_{\beta_{(i+1)}}(\varphi_t) \restriction e_i R\langle\mathfrak{F}_{\beta_i}\rangle = \varphi_t$ für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}_{\beta_i}$ laut RF-Konstruktion schreiben läßt. Es ist somit für alle $i \in \omega$ eine Darstellung $M_{\beta_{(i+1)}} = M_{\beta_i} \oplus D_i$ mit $R\langle\mathfrak{F}_{\beta_i}\rangle \cong e_i R\langle\mathfrak{F}_{\beta_i}\rangle \sqsubseteq D_i$ möglich.

Die Kette $(\mathfrak{x}_{\beta_i})_{i\in\omega}$ und der Endomorphismus Φ_β erfüllen alle Voraussetzungen des Stufen-Lemmas. Es läßt sich daher $\mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{x}_\beta \in \mathfrak{A}$ durch eine geeignete Stufen-Konstruktion gewinnen.

Aus $\mathfrak{x}_\beta \subseteq \mathfrak{x}_\alpha$ folgt $\mathfrak{x}_\gamma \subseteq \mathfrak{x}_\alpha$ für alle $\gamma \leq \alpha$ mit der Induktionsvoraussetzung. Gegeben sei ein $\delta < \alpha$, $\delta \notin E$. Dann existiert ein $i \in \omega$ mit $\delta < \beta_i$. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{x}_\delta \sqsubseteq \mathfrak{x}_{\beta_i}$ und mit Stufen-Lemma 3.4 (iii) folgt $\mathfrak{x}_{\beta_i} \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$, also $\mathfrak{x}_\delta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$.

Ebenfalls laut Stufen-Lemma 3.4 (iii) gilt $|M_\alpha| = |M_\alpha \setminus M_\beta| = |M_\beta| = |R||\beta| = |R||\alpha|$.

Fall 3: $\alpha \in \mathrm{LORD} \cap \kappa$.

Offensichtlich ist die Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha\in\kappa}$ an der Limesordinalzahl α stetig aufgrund der Bildung des Supremums.

Es existieren eine Limesordinalzahl $\mathrm{cf}\,(\alpha) \leq \lambda \leq \alpha$ und eine aufsteigende, stetige Folge $(\beta_i)_{i\in\lambda}$ von Ordinalzahlen $\beta_i \notin E \subseteq \kappa^o$ mit $\bigcup_{i\in\lambda} \beta_i = \alpha$. Dies ist für $\mathrm{cf}\,(\alpha) = \aleph_0$ offensichtlich, folgt für $\aleph_0 < \mathrm{cf}\,(\alpha)$ daraus, daß E nicht reflexiv ist. Laut Induktionsvoraussetzung definiert $(\beta_i)_{i\in\lambda}$ die stetige Kette $(\mathfrak{x}_{\beta_i})_{i\in\lambda}$ in $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$ mit $\bigcup_{i\in\lambda} \mathfrak{x}_{\beta_i} = \mathfrak{x}_\alpha$. Lemma 2.15 liefert sofort $\mathfrak{x}_{\beta_i} \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{A}$ für alle $i \in \lambda$, insbesondere ist M_α wieder ein freier R-Modul. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt $\mathfrak{x}_\gamma \subseteq \mathfrak{x}_\alpha$ für alle $\gamma \leq \alpha$ und $\mathfrak{x}_\delta \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$ für alle $\delta \leq \alpha$, $\delta \notin E$.

Laut Induktionsvoraussetzung gilt $|M_\alpha| = |M_0| + \sum_{\beta<\alpha} |M_{\beta+1} \setminus M_\beta| = |R| + \sum_{\beta<\alpha} |R||\beta|$ $= |R||\alpha|$. $\square$

Für einen R-Modul M mit $|M| = \kappa$ sei hier eine zur Definition 1.2 äquivalente Definition über κ-Filtrationen geben.

Lemma 3.6 *M sei ein R-Modul mit $|M| = \kappa$, $|R| < \kappa$ regulär.*

(a) M ist genau dann κ-frei, falls eine κ-Filtration $M = \bigcup_{\alpha\in\kappa} M_\alpha$ freier Untermoduln von M existiert.

(b) M ist genau dann stark κ-frei, falls eine κ-Filtration $M = \bigcup_{\alpha\in\kappa} M_\alpha$ freier Untermoduln von M mit $M/M_{\alpha+1}$ κ-frei für alle $\alpha \in \kappa$ existiert.

Beweis: Siehe [5, Chapter IV.1, S. 88ff].

Es lassen sich nun sofort einige einfache Eigenschaften des R-Moduls $M := \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ beweisen.

Satz 3.7 *Es sei* $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *durch obige Konstruktion gegeben*
und $\mathfrak{x} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{x}_\alpha = (M, \mathfrak{F}, \pi)$.
(a) Es ist $|M| = \kappa$ *und* $\pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M$ *operiert scharf transitiv auf* $\mathfrak{p}M$.
(b) M *ist stark* κ*-frei.*
(c) Für jeden Homomorphismus $\Phi \in \operatorname{End} M$ *existieren eine stationäre Menge* $E_\Phi \subseteq \kappa$ *und eine Folge* $(f_\alpha)_{\alpha\in E_\Phi}$ *mit* $f_\alpha \in R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle$, *so daß* $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha)$ *für alle* $\alpha \in E_\Phi$ *ist.*
Insbesondere gilt $M_\alpha \pi_\beta(f_\alpha - f_\beta) = 0$ *für* $\alpha \leq \beta < \kappa$.
Ist $\Phi \in \operatorname{End} M$ *surjektiv, läßt sich zudem* $E_\Phi \subseteq \kappa$ *so wählen,*
daß $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha) \in \operatorname{End} M_\alpha$ *surjektiv für alle* $\alpha \in E_\Phi$ *ist.*

Beweis:
zu (a): $|M| = \kappa$ und $\pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M$ sind offensichtlich. Es gilt $\mathfrak{p}M = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{p}M_\alpha$ mit Lemma 3.5 (b). Für jedes $\alpha < \kappa$, $\alpha \notin E$ agiert $\pi_{\alpha+1}(R^* \times \langle\mathfrak{F}_{\alpha+1}\rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M_{\alpha+1}$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M_{\alpha+1}$, weshalb auch $\pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M$ agiert.
zu (b): Es sei $\alpha < \kappa$ und $U \subseteq M/M_{\alpha+1}$ ein Untermodul mit $|U| < \kappa$. Da κ regulär ist, existiert ein $\alpha < \beta < \kappa$, sodaß bereits $U \subseteq M_\beta/M_{\alpha+1}$ gilt. Wegen Lemma 3.5 (b) ist $\mathfrak{x}_{\alpha+1} \sqsubseteq \mathfrak{x}_\beta$ und es folgt $U \subseteq M_\beta/M_{\alpha+1}$ frei.
Mit Lemma 3.6 (b) folgt für die Filtration $M := \bigcup_{\alpha\in\kappa} M_\alpha$, daß M stark κ-frei ist.
zu (c): Es sei ein $\Phi \in \operatorname{End} M$ gegeben. Laut Diamant-Prinzip $\diamondsuit_\kappa(E)$ ist
$S := \{\alpha \in E \mid \Phi \restriction M_\alpha = \Phi_\alpha\}$ stationär, wobei Φ_α die für die stationäre Menge E gewählten Jensen-Funktionen sind.
1.) Für alle $\alpha \in S$ gilt $\Phi \restriction M_\alpha \in \pi_\alpha(R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle)$: Angenommen, für ein $\alpha \in S \subseteq E$ ist $\Phi_\alpha = \Phi \restriction M_\alpha \in \operatorname{End} M_\alpha \setminus \pi_\alpha(R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle)$. Dann entsteht $\mathfrak{x}_{\alpha+1}$ aus $\mathfrak{x}_\alpha$ durch Stufen-Konstruktion. Insbesondere gilt $M_{\alpha+1} \subseteq_{*p} (\widehat{M_\alpha})_p$.
Ist $m \in M_{\alpha+1}$, so ist m Grenzwert einer Folge $(m_i)_{i\in\omega} \subseteq M_\alpha$ bezüglich der p-adischen Topologie auf $M_{\alpha+1} \subseteq_{*p} (\widehat{M_\alpha})_p$. Dann konvergiert $(\Phi_\alpha(m_i))_{i\in\omega} \subseteq M_\alpha$ gegen $\Phi(m)$ bezüglich der p-adischen Topologie auf M. Wie unter (b) bewiesen wurde, sind

$M_{\alpha+1} \subseteq M$ und $M/M_{\alpha+1}$ κ-frei. Insbesondere sind $M_{\alpha+1}$, M und $M/M_{\alpha+1}$ p-reduziert. Mit Lemma 3.3 folgt $\Phi(m) \in M_{\alpha+1} \Longrightarrow \Phi(M_{\alpha+1}) \subseteq M_{\alpha+1}$; $\Phi_\alpha = \Phi \restriction M_\alpha$ läßt sich somit durch $\Phi \restriction M_{\alpha+1}$ auf $M_{\alpha+1}$ fortsetzen. Dies widerspricht Lemma 3.4 (ii).
Also ist $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha) \in \pi_\alpha(R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle)$ für ein $f_\alpha \in R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle$.
2.) Ist $\Phi \in \operatorname{End} M$ surjektiv, so ist $\{\alpha \in \kappa \mid \Phi(M_\alpha) = M_\alpha\}$ ein cub.
Die stationäre Menge $E_\Phi := S \cap C$ besitzt die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Es bedarf noch einiger Anstrengung, um von Lemma 3.7 (c) zu $\operatorname{Aut} M \cong R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle$ zu gelangen.

4 Das Stufen-Lemma

Im folgenden soll das Stufen-Lemma 3.4 bewiesen werden.

Hierzu werden zunächst einige Bezeichnungen eingeführt.

Wie in den Voraussetzungen des Stufen-Lemmas ist in diesem Kapitel $(\mathfrak{x}_i)_{i\in\omega}$ immer eine Kette in $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$ mit $\mathfrak{x}_i = (M_i, \mathfrak{F}_i, \pi_i)$ und $M_i \neq 0$, $\mathfrak{F}_i \neq \emptyset$, $M_{i+1} = M_i \oplus D_i$ für alle $i \in \omega$. Diese Kette $(\mathfrak{x}_i)_{i\in\omega}$ genüge zusätzlich der folgenden Bedingung:

> Für jedes $i \in \omega$ existiert ein $e_i \in D_i$ mit $R\langle\mathfrak{F}_i\rangle \cong e_i R\langle\mathfrak{F}_i\rangle \sqsubseteq D_i$; ferner ist $\pi_{i+1}(\varphi_t) \restriction e_i R\langle\mathfrak{F}_i\rangle = \varphi_t$ für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}_i$.

Desweiteren sei $\mathfrak{x} := \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{x}_i = (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{x}})$ und p ein Primelement des PID R mit $R \neq \widehat{R}_p$.

Für einen R-Modul M sei $\widehat{M}$ die p-adische Vervollständigung von M, $\widehat{R}$ die p-adische Vervollständigung von R.

Außerdem schreiben wir $RF := R\langle\mathfrak{F}\rangle$ und $RF_i := R\langle\mathfrak{F}_i\rangle$.

Für jedes $f \in RF$ sei die auf $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ eindeutig bestimmte Fortsetzung von $f^{\mathfrak{x}}$ als Endomorphismus wiederum mit $f^{\mathfrak{x}}$ bezeichnet, $RF^{\mathfrak{x}}$ sei der von diesen Abbildungen erzeugte Teilring von End $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$.

$\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ ist ein rechter $RF^{\mathfrak{x}}$-Modul.

Aus $M^{\mathfrak{x}} = M_j \oplus \bigoplus_{j\leq i<\omega} D_i$ folgt $\widehat{M^{\mathfrak{x}}} \subseteq \widehat{M_j} \oplus \prod_{j\leq i<\omega} \widehat{D_i}$ für alle $j \in \omega$, mit $e_i RF_i \sqsubseteq D_i$ ist auch $e_i \widehat{RF_i} \sqsubseteq \widehat{D_i}$. Bezüglich dieser Darstellungen von $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ sind für jedes $m \in \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$, $i \in \omega$ eine $\widehat{M_i}$-Komponente, eine $\widehat{D_i}$-Komponente und eine $\widehat{RF_i}$-Komponente wohldefiniert.

Definition 4.1 *Ist $m \in M^{\mathfrak{x}}$ und $\widehat{r} := \sum_{i\in\omega} p^i r_i \in \widehat{R}$, so nennen wir*
$y := \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i = \sum_{i\in\omega} p^i (r_i m + e_i) \in \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ einen **Zweig** *von $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$.*
Für alle $\varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$, $k \in \omega$ sei
$y^k_\varphi := \sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k}(r_i m + e_i)\varphi^{\mathfrak{x}} = (\sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k} r_i) m\varphi^{\mathfrak{x}} + \sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k} e_i \varphi^{\mathfrak{x}} \in \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$.

Im folgenden sei immer $\widehat{r} := \sum_{i\in\omega} p^i r_i \in \widehat{R}$, $y := \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i$ ein Zweig auf $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ und

y^k_φ wie oben definiert.

Zur Gewöhnung an diese Definitionen seien zunächst einige einfache Beobachtungen erwähnt.

Lemma 4.2
(a) Für jedes $\varphi_t \in \mathfrak{F}$ ist $\varphi_t^\mathfrak{x} \in \operatorname{Aut} \widehat{M^\mathfrak{x}}$.
(b) Für jeden Zweig $y \in \widehat{M^\mathfrak{x}}$ und jedes $f \in RF$ folgt $f = 0$ aus $yf^\mathfrak{x} \in M^\mathfrak{x}$.

Beweis:
zu (a): Es seien ein beliebiges $\widehat{m} \in \widehat{M^\mathfrak{x}}$ und $\varphi_t \in \mathfrak{F}$ gegeben, $(m_i)_{i\in\omega}$ sei eine Darstellung von $\widehat{m}$ als Cauchy-Folge in $M^\mathfrak{x}$. Es ist $\varphi_t^\mathfrak{x} \in \operatorname{Aut} M^\mathfrak{x}$.
Dann ist $(m_i(\varphi_t^\mathfrak{x})^{-1})_{i\in\omega}$ eine Cauchy-Folge in $M^\mathfrak{x}$; für deren Grenzwert $\widehat{m'} \in \widehat{M^\mathfrak{x}}$ gilt $\widehat{m'}\varphi_t^\mathfrak{x} = \widehat{m}$. Somit ist $\varphi_t^\mathfrak{x}$ surjektiv.
Gilt $\widehat{m}\varphi_t^\mathfrak{x} = 0$, so ist $(m_i\varphi_t^\mathfrak{x})_{i\in\omega}$ eine Nullfolge. O.E. gelte $p^i | m_i\varphi_t^\mathfrak{x}$ für alle $i \in \omega$, woraus $p^i | m_i$ für alle $i \in \omega$ folgt; es ist $(m_i)_{i\in\omega}$ eine Nullfolge, also $\widehat{m} = 0$. Somit ist $\varphi_t^\mathfrak{x}$ auch injektiv.
zu (b): Gegeben seien ein Zweig $y = \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i \in \widehat{M^\mathfrak{x}}$ und ein $f \in RF$ mit $yf^\mathfrak{x} \in M^\mathfrak{x}$. O.E. sei $m \in M_{j_1}$, $yf^\mathfrak{x} \in M_{j_2}$, $f \in RF_{j_3}$ für $j_1, j_2, j_3 \in \omega$. Für jedes $\max\{j_1, j_2, j_3\} < j$ betrachten wir die $\widehat{RF_j}$-Komponente der Gleichung $\widehat{r}mf^\mathfrak{x} + \sum_{i\in\omega} p^i e_i f^\mathfrak{x} = yf^\mathfrak{x}$:
Mit $m \in M_j \wedge f \in RF_j \Longrightarrow \widehat{r}mf^\mathfrak{x} \in \widehat{M_j}$, $yf^\mathfrak{x} \in M_j$, $p^i e_i f^\mathfrak{x} \in M_j$ für $i < j$ und $p^i e_i f^\mathfrak{x} = p^i e_i f \in e_i RF_i$ für $i \geq j$ ergibt sich die $\widehat{RF_j}$-Komponente obiger Gleichung zu $p^j e_j f = 0$. Es folgt $e_j f = 0 \Longrightarrow f = 0$. $\square$

Ist M ein R-Modul, U ein Untermodul von M und p ein Primelement von R, so bezeichnet man $M_{*p} := \{m \in M |\ \exists\, n \in \omega : p^n m \in U\}$ als **p-Bereinigung** von U in M.
Ist y ein Zweig von $\widehat{M^\mathfrak{x}}$, so ist $\langle M^\mathfrak{x}, y\rangle_{RF^\mathfrak{x}}$ insbesondere ein R-Modul wegen $R \subseteq RF^\mathfrak{x} \subseteq \operatorname{End} \widehat{M^\mathfrak{x}}$. Mit $\langle M^\mathfrak{x}, y\rangle_{RF^\mathfrak{x}}$ ist auch $(\langle M^\mathfrak{x}, y\rangle_{RF^\mathfrak{x}})_{*p} = \langle M^\mathfrak{x}, yRF^\mathfrak{x}\rangle_{*p}$ ein R-Modul.

Im folgenden sei immer $M^{\mathfrak{y}} := \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p}$.

Ist ein Zweig $y = \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i$ gegeben, so gilt für jedes $\varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$: $m\varphi^{\mathfrak{x}} \in M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow m\varphi^{\mathfrak{x}} \in M_j \Longrightarrow \widehat{r}m\varphi^{\mathfrak{x}} \in \widehat{M_j}$ für ein $j = j(\varphi) \in \omega$. Insbesondere läßt sich für jedes $\varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ ein $k(\varphi) \in \omega$ mit $j \leq k(\varphi)$ und $\varphi \in \langle\mathfrak{F}_{k(\varphi)}\rangle$ wählen. Für $k(\varphi) \leq k$ gilt $y^k_\varphi = (\sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k}r_i)m\varphi^{\mathfrak{x}} + \sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k}e_i\varphi$, wobei $(\sum_{k\leq i<\omega} p^{i-k}r_i)m\varphi^{\mathfrak{x}}$ die $\widehat{M_{k(\varphi)}}$-Komponente von y^k_φ und $p^{i-k}e_i\varphi$ für $k(\varphi) \leq k \leq i$ jeweils die $\widehat{RF_i}$-Komponente von y^k_φ ist.

Im folgenden sei $k(\varphi)$ für einen Zweig y und ein $\varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ immer gewählt wie oben.

Es wird gezeigt, daß $M^{\mathfrak{y}}$ bei geeigneter Wahl des Zweigs y das Stufen-Lemma erfüllt. Hierzu befassen sich die nächsten Lemmatas zunächst mit der Freiheit von $M^{\mathfrak{y}}$.

Lemma 4.3

(a) $M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k \in \omega\rangle_R$.

(b) $M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$.

Beweis:

zu (a):

„ $\subseteq$ “: Es sei ein $m \in M^{\mathfrak{y}}$ gegeben. Dann existieren $k \in \omega$, $m' \in M^{\mathfrak{x}}$ und $f = \sum_{i=1}^n s_i\mu_i \in RF$ mit $p^k m = m' + yf^{\mathfrak{x}}$. Somit ist $p^k m = m' + yf^{\mathfrak{x}} = m' + \sum_{i=1}^n s_i y\mu_i^{\mathfrak{x}} = m' + \sum_{i=1}^n s_i y^0_{\mu_i} = m' + \sum_{i=1}^n s_i(m'_i + p^k y^k_{\mu_i}) = m' + \sum_{i=1}^n s_i m'_i + p^k \sum_{i=1}^n s_i y^k_{\mu_i} \Longrightarrow p^k m = m'' + p^k \sum_{i=1}^n s_i y^k_{\mu_i}$ für geeignet gewählte $m'_i, m'' \in M^{\mathfrak{x}}$. Es folgt insbesondere $m'' \in M^{\mathfrak{x}} \cap p^k\widehat{M^{\mathfrak{x}}} = p^k M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow m'' = p^k m'''$ mit $m''' \in M^{\mathfrak{x}}$, da $M^{\mathfrak{x}} \subseteq_{*p} \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$.

Fazit: $m = m''' + \sum_{i=1}^n s_i y^k_{\mu_i} \in \langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k < \omega\rangle_R$.

„ $\supseteq$ “: Dies folgt sofort aus $p^k y^k_\varphi = y\varphi^{\mathfrak{x}} - \sum_{i=0}^{k-1}(r_i m + e_i)\varphi^{\mathfrak{x}} \in \langle M^{\mathfrak{x}}, y\rangle_{RF'} \subseteq M^{\mathfrak{y}}$.

zu (b): Gezeigt wird $\langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k \in \omega\rangle_R = \langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$

„ $\subseteq$ “: Dies folgt sofort aus $y^k_\varphi = p^l y^{k+l}_\varphi + \sum_{i=k}^{k+l-1} p^{i-k}(r_i m + e_i)\varphi^{\mathfrak{x}}$ für alle $k, l \in \omega$, $\varphi \neq 0$ und $y^k_0 = 0$ für alle $k \in \omega$.

„ $\supseteq$ “: Dies gilt offensichtlich. $\square$

Lemma 4.4 *Für jedes feste $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ gilt:*

(a) $\{y_\varphi^k |\ k(\varphi) \leq k < \omega\}$ ist linear unabhängig.

(b) $\langle y_\varphi^k |\ k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R \cap M^\mathfrak{x} = \langle(r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} | k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$.

Beweis:

zu (a): Es sei eine Linearkombination $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k = 0$ gegeben, wobei fast alle Koeffizienten $\lambda_k = 0$. Angenommen, es existieren $k \in \omega$ mit $\lambda_k \neq 0$.

Setze $k' := \min\ \{k(\varphi) \leq k < \omega |\ \lambda_k \neq 0\}$. Die $\widehat{RF_{k'}}$-Komponente der Gleichung $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k = 0$ liefert: $\lambda_{k'} p^{k'-k} e_{k'} \varphi = 0 \Longrightarrow \lambda_{k'} = 0$, im Widerspruch zu $\lambda_{k'} \neq 0$.

Somit ist $\{y_\varphi^k | k(\varphi) \leq k < \omega\}$ linear unabhängig.

zu (b):

„ $\subseteq$ “: Es sei eine Linearkombination $m' := \sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k \in M^\mathfrak{x}$ gegeben. Es folgt $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k \in M_{k'} \subseteq M^\mathfrak{x}$ für ein geeignetes $k' \in \omega$.

Also verschwindet für jedes $k'' := \max\{k(\varphi), k'\} \leq l$ die $\widehat{RF_l}$-Komponente von $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k \in M_{k'}$: $\sum_{k(\varphi)\leq k\leq l} \lambda_k p^{l-k} e_l \varphi = 0 \Longrightarrow \sum_{k(\varphi)\leq k\leq l} \lambda_k p^{l-k} = 0$. **(1)**

Es folgt $m' = \sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k y_\varphi^k = \sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_k \sum_{k\leq i} p^{i-k}(r_i m + e_i)\varphi^\mathfrak{x}$

$= \sum_{i\in\omega}(\sum_{k(\varphi)\leq k\leq i} \lambda_k p^{i-k})(r_i m + e_i)\varphi^\mathfrak{x} = \sum_{0\leq i<k''}(\sum_{k(\varphi)\leq k\leq i} \lambda_k p^{i-k})(r_i m + e_i)\varphi^\mathfrak{x}$

$\in \langle(r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} | k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$ mit (1).

„ $\supseteq$ “: Dies folgt sofort aus $y_\varphi^k - p y_\varphi^{k+1} = (r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x}$. □

Lemma 4.5 $\{(r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\}$ *ist linear unabhängig.*

Beweis: Es sei eine Linearkombination $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k (r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} = 0$ gegeben, wobei fast alle Koeffizienten $\lambda_\varphi^k = 0$. Angenommen, es existieren $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k \in \omega$ mit $\lambda_\varphi^k \neq 0$.

Setze $k' := \max\ \{k | \exists 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle :\ k(\varphi) \leq k < \omega \wedge \lambda_\varphi^k \neq 0\}$. Die $\widehat{RF_{k'}}$-Komponente der Gleichung $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k (r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} = 0$ liefert: $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k'} \lambda_\varphi^{k'} e_{k'} \varphi = 0 \Longrightarrow$ $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} \lambda_\varphi^{k'} \varphi = 0 \Longrightarrow \forall\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle : \lambda_\varphi^{k'} = 0$, im Widerspruch zur Annahme $\lambda_{\varphi'}^{k'} \neq 0$ für ein geeignetes $0 \neq \varphi' \in \langle\mathfrak{F}\rangle$.

Somit ist $\{(r_k m + e_k)\varphi^\mathfrak{x} |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k\}$ linear unabhängig. □

Lemma 4.6

(a) $\{y_\varphi^k |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\}$ *ist linear unabhänig.*

(b) $\langle y_\varphi^k |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R \cap M^{\mathfrak{x}}$

$= \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R.$

Beweis:

zu (b): Es sei eine Linearkombination $m' := \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k \in M^{\mathfrak{x}}$ gegeben, wobei fast alle Koeffizienten $\lambda_\varphi^k = 0$.

Für jedes feste $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ läßt sich immer $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k = m_\varphi + r_\varphi y_\varphi^{k'(\varphi)}$ **(1)**
mit geeigneten $m_\varphi \in M^{\mathfrak{x}}$, $r_\varphi \in R$, $k'(\varphi) := \max\ \{k(\varphi) \leq k < \omega |\ \lambda_k^\varphi \neq 0\}$ schreiben, wobei fast alle $m_\varphi = 0$, $r_\varphi = 0$. Es folgt $m' = \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k$
$= \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle}(\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k) = \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} m_\varphi + \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi y_\varphi^{k'(\varphi)} \in M^{\mathfrak{x}}$
$\Longrightarrow \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi y_\varphi^{k'(\varphi)} \in M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi y_\varphi^{k'(\varphi)} \in M_{k'}$ für ein $k' \in \omega$.
Also verschwindet für jedes $\max\{k(\varphi), k' |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle \wedge r_\varphi \neq 0\} \leq l$ die $\widehat{RF_l}$-Komponente von $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi y_\varphi^{k'(\varphi)} \in M_{k'}$:
$\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi p^{l-k'(\varphi)} e_l \varphi = 0 \Longrightarrow \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} r_\varphi p^{l-k'(\varphi)} \varphi = 0 \Longrightarrow \forall\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle : r_\varphi = 0.$
Mit (1) folgt $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k = m_\varphi \in M^{\mathfrak{x}}$ für alle $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$. **(2)**
Fazit: Mit (2) und Lemma 4.4 (b) folgt
$\langle y_\varphi^k |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R \cap M^{\mathfrak{x}} = \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} \langle y_\varphi^k |\ k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R \cap M^{\mathfrak{x}} = \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R = \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R.$

zu (a): Es sei eine Linearkombination $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k = 0$ gegeben, wobei fast alle Koeffizienten $\lambda_\varphi^k = 0$.

Insbesondere gilt $\sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k = 0 \in M^{\mathfrak{x}}$, woraus $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k \in M^{\mathfrak{x}}$ für alle $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ mit (2) folgt. Mit Lemma 4.4 (b) und Lemma 4.5 folgt
$\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k \in \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$, wobei
$0 = \sum_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k \in \bigoplus_{0\neq\varphi\in\langle\mathfrak{F}\rangle} \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R.$
Also gilt $\sum_{k(\varphi)\leq k} \lambda_\varphi^k y_\varphi^k = 0$ für alle $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$. Mit Lemma 4.4 (a) folgt $\lambda_\varphi^k = 0$ für alle $0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle$, $k(\varphi) \leq k < \omega$. □

Nun sind die nötigen Hilfsmittel vorhanden, um die algebraische Struktur von $M^{\mathfrak{y}}$ zu untersuchen.

Satz 4.7 (Stufen-Lemma, Teil 1)

Es sei eine stetige Kette $(\mathfrak{x}_i)_{i\in\omega}$ *in* $(\mathfrak{A}, \sqsubseteq)$ *mit* $\mathfrak{x}_i = (M_i, \mathfrak{F}_i, \pi_i)$ *und* $M_i \neq 0$, $\mathfrak{F}_i \neq \emptyset$, $M_{i+1} = M_i \oplus D_i$ *für alle* $i \in \omega$ *gegeben. Für jedes* $i \in \omega$ *sei* $RF_i \cong e_iRF_i \sqsubseteq D_i$ *mit* $\pi_{i+1}(\varphi_t) \upharpoonright e_iRF_i = \varphi_t$ *für alle* $\varphi_t \in \mathfrak{F}_i$. *Das Supremum der Kette sei*
$\mathfrak{x} = \bigcup_{i\in\omega} \mathfrak{x}_i = (M^{\mathfrak{x}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{x}}) \in \mathfrak{A}$. *Desweiteren sei* $y = \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i$ *ein Zweig auf* $\widehat{M^{\mathfrak{x}}}$.
Setze $M^{\mathfrak{y}} := \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p}$ *und* $\pi^{\mathfrak{y}}(\varphi_t) = \varphi_t^{\mathfrak{y}} := \varphi_t^{\mathfrak{x}} \upharpoonright M^{\mathfrak{y}}$ *für alle* $\varphi_t \in \mathfrak{F}$.
Dann gilt für $\mathfrak{y} := (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}, \pi^{\mathfrak{y}})$:
(a) $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y} \in \mathfrak{A}$.
(b) Es gilt $|M^{\mathfrak{y}}| = |M^{\mathfrak{y}} \setminus M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$ *und* $\mathfrak{x}_n \sqsubseteq \mathfrak{y}$ *für alle* $n \in \omega$.
(c) Es ist $M^{\mathfrak{y}} \subseteq_{*p} \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ *und* $M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}} \neq 0$ *p-teilbar, insbesondere* $\mathfrak{x} \not\sqsubseteq \mathfrak{y}$.

Beweis:

zu (a): Offensichtlich ist $M^{\mathfrak{x}} \subseteq M^{\mathfrak{y}}$, $\pi^{\mathfrak{y}}$ eine Fortsetzung von $\pi^{\mathfrak{x}}$.
Setze $C := M^{\mathfrak{x}}$ und $D := \langle y_{\varphi}^k | 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$.
Es ist C frei, D ist frei nach Lemma 4.6 (a). Mit Lemma 4.3 (b) ist $C + D = M^{\mathfrak{y}}$, mit Lemma 4.6 (b) ist $C \cap D = \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} |\ 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\rangle_R$.
Nach Voraussetzung des Satzes besitzt $M^{\mathfrak{x}}$ eine Basis $B := \bigcup_{i\in\omega} B_i$ mit $\langle B_i\rangle = M_i$, $\langle B_{i+1} \setminus B_i\rangle = D_i$ und $\{e_i\varphi | \varphi \in \langle\mathfrak{F}_i\rangle\} \subseteq B_{i+1}$ für alle $i \in \omega$, d.h. die Teilbasis $B \cap e_iRF_i$ von B ist eine Basis von e_iRF_i. Setze

$$B_i' := (B_i \setminus \{e_k\varphi | 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < i\}) \cup \{(r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | 0 \neq \varphi \in \langle\mathfrak{F}\rangle, k(\varphi) \leq k < i\},$$

d.h. in der Basis B von $M^{\mathfrak{x}}$ werden die Basiselemente $(r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}}$ von $C \cap D$ anstelle der zugehörigen Basiselemente $e_k\varphi$ von B eingesetzt.
1.) Für alle $i \in \omega$ ist B_i' eine Basis von M_i. **(1)**
Dies beweisen wir mit vollständiger Induktion.
Beweis: Für $i = 0$ ist $B_0' = B_0$ eine Basis von M_0.
Die zu beweisende Aussage gelte nun bereits für ein $i \geq 0$, d.h. B_i' ist eine Basis von M_i.
a) Ist ein $m' \in M_{i+1}$ gegeben, so existiert eine Darstellung

$$m' = \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} e_{k_j} \varphi_j$$

als Linearkombination über der Basis B_{i+1} mit $b_j \in B_{i+1} \cap B'_{i+1}$, $e_{k_j}\varphi_j \in B_{i+1} \setminus B'_{i+1}$ für alle j. Es gilt insbesondere $m' = \sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} (r_{k_j} m + e_{k_j})\varphi_j^{\mathfrak{x}} - \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} r_{k_j} m \varphi_j^{\mathfrak{x}}$ als Darstellung bezüglich B'_{i+1}, wobei $\sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} r_{k_j} m \varphi_j^{\mathfrak{x}} \in M_i$ bezüglich Basis B'_i zu zerlegen ist.

Somit gilt $M_{i+1} \subseteq \langle B'_{i+1} \rangle$, $\langle B'_{i+1} \rangle \subseteq M_{i+1}$ ist offensichtlich. Fazit: $\langle B'_{i+1} \rangle = M_{i+1}$. **(2)**

b) Es sei nun andererseits eine Linearkombination $\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} (r_{k_j} m + e_{k_j})\varphi_j^{\mathfrak{x}} = 0$ paarweise verschiedener Elemente in B'_{i+1} mit $b_j \in B'_{i+1} \cap B_{i+1}$, $(r_{k_j} m + e_{k_j})\varphi_j^{\mathfrak{x}} \in B'_{i+1} \setminus B_{i+1}$ gegeben. Angenommen, diese Linearkombination ist nichttrivial, insbesondere seien o.E. alle $\lambda_j \neq 0$ und $\lambda_{\varphi_j}^{k_j} \neq 0$.

Dann ist $\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} e_{k_j} \varphi_j = -\sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} r_{k_j} m \varphi_j^{\mathfrak{x}} \in M_i$ eine Linearkombination paarweise verschiedener Elemente in B_{i+1}. Damit ist $\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} e_{k_j} \varphi_j$ eine Linearkombination innerhalb B_i und schließlich $\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{\varphi_j}^{k_j} (r_{k_j} m + e_{k_j})\varphi_j^{\mathfrak{x}} = 0$ eine Linearkombination innerhalb B'_i im Widerspruch zu B'_i linear unabhängig. Wir haben somit: B'_{i+1} ist linear unabhängig. **(3)**

c) Mit (2) und (3) ist B'_{i+1} eine Basis von M_{i+1} und der Induktionsschritt vollendet.

2.) $M^{\mathfrak{y}}$ ist frei.

Beweis: Mit (1) ist $B' := \bigcup_{i \in \omega} B'_i$ eine Basis von $M^{\mathfrak{x}}$ mit
$\{(r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | \; 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, k(\varphi) \leq k < \omega\} \subseteq B' \Longrightarrow$
$C \cap D = \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | \; 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, k(\varphi) \leq k < \omega \rangle_R \sqsubseteq \langle B' \rangle = C$.
Insbesondere ist $C/(C \cap D) \cong (C + D)/D$ frei; aus D und $(C + D)/D$ frei folgt abschließend $C + D = M^{\mathfrak{y}}$ frei.

3.) Für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}$ ist $\varphi_t^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{Aut} M^{\mathfrak{y}}$ wohldefiniert.

Beweis: Nach Lemma 4.2 (a) ist $\varphi_t^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{Aut} \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}$. Da $M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}} \rangle_{*p}$ als p-Bereinigung eines $RF^{\mathfrak{x}}$-Moduls selbst ein $RF^{\mathfrak{x}}$-Modul und somit unter $\varphi_t^{\mathfrak{x}}$ und $(\varphi_t^{\mathfrak{x}})^{-1}$ abgeschlossen ist, ist $\varphi_t^{\mathfrak{y}} = \varphi_t^{\mathfrak{x}} \restriction M^{\mathfrak{y}} \in \operatorname{Aut} M^{\mathfrak{y}}$ wohldefiniert.

4.) $\pi^{\mathfrak{y}}$ genügt der U-Eigenschaft auf $M^{\mathfrak{y}}$.

Beweis: Es seien ein $\varphi \in R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ und ein $z \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{y}}$ mit $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z$ gegeben.
Für $z \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}} \rangle_{*p}$ existieren $k \in \omega$, $z' \in M^{\mathfrak{x}}$ und $f \in RF$ mit $p^k z = z' + yf^{\mathfrak{x}}$.
Es folgt $z\varphi^{\mathfrak{y}} = z \Longrightarrow p^k z \varphi^{\mathfrak{y}} = p^k z \Longrightarrow (z' + yf^{\mathfrak{x}})\varphi^{\mathfrak{y}} = z' + yf^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow yf^{\mathfrak{x}}(\varphi - 1)^{\mathfrak{x}} = z'(1 - \varphi)^{\mathfrak{x}} \in M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow f(\varphi - 1) = 0 \Longrightarrow f = 0 \vee \varphi = 1$ mit Lemma 4.2 (b).

Ist $f = 0$, so folgt $p^k z = z' + yf^{\mathfrak{x}} = z' \in M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow z \in M^{\mathfrak{x}}$, insbesondere ist $z \in \mathfrak{p}M^{\mathfrak{x}}$ mit $z\varphi^{\mathfrak{x}} = z$. Hier ergibt sich $\varphi = 1$ aus der U-Eigenschaft von $\pi^{\mathfrak{x}}$.

Es folgt also jeweils $\varphi = 1$, nach Lemma 2.9 genügt $\pi^{\mathfrak{y}}$ der U-Eigenschaft.

Fazit: Zusammenfassend ist $\mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y} \in \mathfrak{A}$.

zu (b):

1.) Für alle $n \in \omega$ gilt $\mathfrak{x}_n \sqsubseteq \mathfrak{y}$.

Beweis: Für alle $n \in \omega$ gilt $\mathfrak{x}_n \subseteq \mathfrak{x} \subseteq \mathfrak{y}$, weshalb über (a) hinaus lediglich $M^{\mathfrak{y}}/M_n$ frei zu beweisen ist.

Es ist zu beachten, daß die Wahl von $k(\varphi)$ für $\varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle$ willkürlich war, abgesehen von den schwachen Nebenbedingungen $m\varphi^{\mathfrak{x}} \in M_{k(\varphi)}$ und $\varphi \in \langle \mathfrak{F}_{k(\varphi)} \rangle$. Insbesondere behalten die Lemmatas 4.3 bis 4.6 und die Argumentationen unter Beweispunkt (a), 1.) ihre Gültigkeit, wenn wir $k(\varphi)$ durch $\max\{n, k(\varphi)\}$ für ein festes $n \in \omega$ ersetzen.

a) Es sind $C := M^{\mathfrak{x}}$ und $D := \langle y^k_\varphi |\ 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, \max\{n, k(\varphi)\} \leq k < \omega \rangle_R$ frei, wobei $C + D = M^{\mathfrak{y}}$ und $C \cap D = \langle (r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} |\ 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, \max\{n, k(\varphi)\} \leq k < \omega \rangle_R$ analog zu Lemma 4.3 (b) und Lemma 4.6 (b) folgt.

b) Setze $B' := (B \setminus \{e_k\varphi | 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, \max\{n, k(\varphi)\} \leq k < \omega\}) \cup$
$\{(r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} | 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, \max\{n, k(\varphi)\} \leq k < \omega\}$.

Dann ist B' eine Basis von $M^{\mathfrak{x}}$ analog zu Beweispunkt (a), 1.) mit
$B_n \dot{\cup} \{(r_k m + e_k)\varphi^{\mathfrak{x}} |\ 0 \neq \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, \max\{n, k(\varphi)\} \leq k < \omega\} \subseteq B'$,
woraus $(C \cap D) \oplus M_n \sqsubseteq C$ folgt. **(4)**

c) Aus (4) folgt: $D \cap M_n = (C \cap D) \cap M_n = 0 \Longrightarrow D + M_n = D \oplus M_n$ und
$C/M_n \cap (D + M_n)/M_n = [C \cap (D + M_n)]/M_n = [(C \cap D) + M_n]/M_n \sqsubseteq C/M_n \Longrightarrow$
$C' \cap D' \sqsubseteq C'$ mit $C' := C/M_n = M^{\mathfrak{x}}/M_n$ frei und
$D' := (D + M_n)/M_n = (D \oplus M_n)/M_n \cong D$ frei.

Wie unter Beweispunkt (a), 2.) folgt hieraus $C' + D' = (C + D)/M_n = M^{\mathfrak{y}}/M_n$ frei.

2.) $|M^{\mathfrak{y}}| = |M^{\mathfrak{y}} \setminus M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$.

Beweis: Es gilt $|M^{\mathfrak{x}}| \leq |M^{\mathfrak{y}}| = |\langle M^{\mathfrak{x}}, y^k_\varphi | \varphi \in \langle \mathfrak{F} \rangle, k \in \omega \rangle_R| \leq |M^{\mathfrak{x}}| \cdot |R| \cdot |\langle \mathfrak{F} \rangle| = |M^{\mathfrak{x}}| \Longrightarrow$
$|M^{\mathfrak{y}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$ mit Lemma 4.3 (a) unter Beachtung von $\aleph_0 \leq |R| \leq |M^{\mathfrak{x}}|$ und $|\mathfrak{F}| \leq |M^{\mathfrak{x}}|$.

Zudem ist $y = y1^{\mathfrak{x}} \notin M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow |M^{\mathfrak{y}} \setminus M^{\mathfrak{x}}| = |M^{\mathfrak{x}}|$ laut Lemma 4.2 (b).

zu (c): Laut Definition ist $M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p} \subseteq_{*p} \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ und $0 \neq M^{\mathfrak{y}}/M^{\mathfrak{x}} \subseteq \widehat{M^{\mathfrak{x}}}/M^{\mathfrak{x}}$ p-teilbar. □

Der eigentliche Clou des Stufen-Lemmas besteht in der Möglichkeit, durch geschickte Vorwahl des Zweigs y unerwünschte Endomorphismen zu zerstören. Diese Idee geht auf Brandon Goldsmith zurück, siehe [9].

Satz 4.8 (Stufen-Lemma, Teil 2)
Zusätzlich zu den Voraussetzungen aus **Satz 4.7** *sei ein* $\eta := \eta^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{End} M^{\mathfrak{x}} \setminus \pi^{\mathfrak{x}}(RF)$ *gegeben,* $\eta^{\mathfrak{y}} := \eta^{\mathfrak{x}} \restriction M^{\mathfrak{y}}$ *sei die auf* $M^{\mathfrak{y}} \subseteq \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$ *eindeutig bestimmte Fortsetzung von* $\eta^{\mathfrak{x}}$*. Dann gilt* $y\eta^{\mathfrak{y}} \notin M^{\mathfrak{y}}$ *bei geeigneter Wahl des Zweigs* $y \in \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$*, d.h.* $\eta^{\mathfrak{x}}$ *ist nicht auf* $M^{\mathfrak{y}}$ *als Endomorphismus fortsetzbar.*

Beweis: Wir wählen für $M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p}$ zunächst Zweig $y = \sum_{i\in\omega} p^i e_i$.
Ist $y\eta^{\mathfrak{y}} \notin M^{\mathfrak{y}}$, so ist der Beweis beendet. Es sei daher $y\eta^{\mathfrak{y}} \in M^{\mathfrak{y}}$. Es gilt somit insbesondere $y\eta^{\mathfrak{x}} \in M^{\mathfrak{y}} = \langle M^{\mathfrak{x}}, yRF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p} \Longrightarrow p^n y\eta^{\mathfrak{x}} = m' + yf^{\mathfrak{x}}$ für geeignet gewähltes $n \in \omega$, $m' \in M^{\mathfrak{x}}$ und $f \in RF$.
1.) Es existiert ein $m \in M^{\mathfrak{x}}$ mit $p^n m\eta^{\mathfrak{x}} \neq mf^{\mathfrak{x}}$. **(1)**
Beweis: Angenommen, es wäre $p^n m\eta^{\mathfrak{x}} = mf^{\mathfrak{x}}$ für alle $m \in M^{\mathfrak{x}}$.
Wählen wir insbesondere $m = e_k \in M^{\mathfrak{x}}$ für ein $k \in \omega$ mit $f \in RF_k$, so folgt $p^n e_k\eta^{\mathfrak{x}} = e_k f^{\mathfrak{x}} = e_k f \Longrightarrow p^n | e_k f \Longrightarrow p^n | f$. Es gilt somit $f = p^n g$ für ein $g \in RF$. Hieraus folgt für alle $m \in M^{\mathfrak{x}}$, daß $p^n m\eta^{\mathfrak{x}} = mf^{\mathfrak{x}} = p^n mg^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow m\eta^{\mathfrak{x}} = mg^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow \eta^{\mathfrak{x}} = g^{\mathfrak{x}} \in \pi^{\mathfrak{x}}(RF)$ im Widerspruch zur Wahl von $\eta^{\mathfrak{x}}$.
Damit ist die Annahme falsch, es existiert also ein $m \in M^{\mathfrak{x}}$ mit $p^n m\eta^{\mathfrak{x}} \neq mf^{\mathfrak{x}}$.
2.) Es existiert ein $\widehat{r} \in \widehat{R}$ mit $\widehat{r}(p^n m\eta^{\mathfrak{x}} - mf^{\mathfrak{x}}) \notin M^{\mathfrak{x}}$. **(2)**
Beweis: Nach (1) ist $\lambda := p^n m\eta^{\mathfrak{x}} - mf^{\mathfrak{x}} \neq 0$.
Angenommen, es wäre $\widehat{r}\lambda \in M^{\mathfrak{x}}$ für jedes $\widehat{r} \in \widehat{R}$.
a) Es sei ein $\widehat{r} = (r_i)_{i\in\omega} \in \widehat{R}$ als Cauchyfolge mit $\widehat{r}\lambda = 0$ gegeben. O.E. sei $\widehat{r} - r_i \in p^i\widehat{R}$.
Insbesondere gilt $r_i\lambda = (r_i - \widehat{r})\lambda \in p^i M^{\mathfrak{x}}$ für alle $i \in \omega$. Unter Berücksichtigung der endlichen p-Höhe von $0 \neq \lambda \in M^{\mathfrak{x}}$ folgt $r_i \in p^k R$ für jedes $k \in \omega$, falls i groß genug ist,

also $\widehat{r} = 0$.

Somit ist $\widehat{r} \to \widehat{r}\lambda$ ein Monomorphismus, der R-Modul $\widehat{R}$ in $M^{\mathfrak{x}}$ einbettet. **(3)**

b) Laut (3) ist $\widehat{R}$ zusammen mit $M^{\mathfrak{x}}$ frei.

Fall 1: Besitzt der PID R ein von p verschiedenes Primelement q, so ist $\widehat{R} \neq 0$ q-teilbar im Widerspruch dazu, daß $\widehat{R}$ frei als R-Modul ist.

Fall 2: Besitzt der PID R keine von p verschiedenen Primelemente, so folgt aus $\widehat{R}$ frei: $R \subseteq_{*p} \widehat{R} \Longrightarrow R \subseteq_{*} \widehat{R} \Longrightarrow R \sqsubseteq \widehat{R} \Longrightarrow \widehat{R}/R$ frei. Dies widerspricht $0 \neq \widehat{R}/R$ p-teilbar für $R \neq \widehat{R}$.

Die Annahme ist somit falsch, es existiert ein $\widehat{r} \in \widehat{R}$ mit $\widehat{r}\lambda \notin M^{\mathfrak{x}}$.

3.) Setze $y' := \widehat{r}m + y = \widehat{r}m + \sum_{i\in\omega} p^i e_i$ mit m, $\widehat{r}$ wie in (1), (2) als neuen Zweig an. Es sei $M^{\mathfrak{y}'} := \langle M^{\mathfrak{x}}, y'RF^{\mathfrak{x}}\rangle_{*p}$ der gemäß Satz 4.7 durch y' induzierte freie R-Modul.

4.) Für $\eta^{\mathfrak{y}'} := \eta^{\mathfrak{x}} \restriction M^{\mathfrak{y}'}$ ist $y'\eta^{\mathfrak{y}'} \notin M^{\mathfrak{y}'}$.

Beweis: Angenommen, es wäre $y'\eta^{\mathfrak{y}'} \in M^{\mathfrak{y}'}$. Es existieren dann insbesondere ein $n' \in \omega$, $m'' \in M^{\mathfrak{x}}$ und $g \in RF$ mit $p^{n'}y'\eta^{\mathfrak{x}} = m'' + y'g^{\mathfrak{x}}$.

a) Es gilt nun $p^n y\eta^{\mathfrak{x}} = m' + yf^{\mathfrak{x}}$, $p^{n'}y'\eta^{\mathfrak{x}} = m'' + y'g^{\mathfrak{x}}$ und $y' = \widehat{r}m + y$, woraus $p^{n+n'}\widehat{r}\cdot m\eta^{\mathfrak{x}} = p^{n+n'}(\widehat{r}m)\eta^{\mathfrak{x}} = p^{n+n'}[y'\eta^{\mathfrak{x}} - y\eta^{\mathfrak{x}}] = p^n(m'' + y'g^{\mathfrak{x}}) - p^{n'}(m' + yf^{\mathfrak{x}}) =$
$y(p^n g^{\mathfrak{x}} - p^{n'}f^{\mathfrak{x}}) + p^n\widehat{r}\cdot mg^{\mathfrak{x}} + p^n m'' - p^{n'}m' \Longrightarrow$
$y(p^n g^{\mathfrak{x}} - p^{n'}f^{\mathfrak{x}}) = p^{n+n'}\widehat{r}\cdot m\eta^{\mathfrak{x}} - p^n\widehat{r}\cdot mg^{\mathfrak{x}} - p^n m'' + p^{n'}m' \in M^{\mathfrak{y}} \cap \widehat{M_k}$ folgt, wobei $k \in \omega$ mit $m\eta^{\mathfrak{x}}$, $mg^{\mathfrak{x}}$, m', $m'' \in M_k$ gewählt ist. **(4)**

b) Laut Satz 4.7 (b) ist $M^{\mathfrak{y}}/M_k$ ein freier R-Modul und somit insbesondere p-reduziert. Es folgt $(M^{\mathfrak{y}}/M_k) \cap (\widehat{M_k}/M_k) = 0 \Longrightarrow M^{\mathfrak{y}} \cap \widehat{M_k} = M_k$, da $M^{\mathfrak{y}}/M_k$ p-reduziert und $\widehat{M_k}/M_k$ p-teilbar ist. Mit (4) und Lemma 4.2 (b) folgt $y(p^n g^{\mathfrak{x}} - p^{n'}f^{\mathfrak{x}}) \in M_k \subseteq M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow$ $p^n g - p^{n'}f = 0$. **(5)**

c) Einsetzen von (5) in (4) ergibt $p^{n+n'}\widehat{r}\cdot m\eta^{\mathfrak{x}} = y(p^n g^{\mathfrak{x}} - p^{n'}f^{\mathfrak{x}}) + p^n\widehat{r}\cdot mg^{\mathfrak{x}} + p^n m'' - p^{n'}m' = p^{n'}\widehat{r}\cdot mf^{\mathfrak{x}} + p^n m'' - p^{n'}m' \Longrightarrow p^{n'}\widehat{r}(p^n m\eta^{\mathfrak{x}} - mf^{\mathfrak{x}}) = p^n m'' - p^{n'}m' \in M^{\mathfrak{x}} \Longrightarrow$ $\widehat{r}(p^n m\eta^{\mathfrak{x}} - mf^{\mathfrak{x}}) \in M^{\mathfrak{x}} \subseteq_{*p} \widehat{M^{\mathfrak{x}}}$, was (2) widerspricht.

Somit ist die Annahme falsch, $y'\eta^{\mathfrak{y}'} \notin M^{\mathfrak{y}'}$.

Fazit: Der Zweig $y' = y'(\eta^{\mathfrak{x}})$ besitzt die gewünschte Eigenschaft. $\square$

Das Stufen-Lemma 3.4 ergibt sich direkt aus Satz 4.7 und Satz 4.8.

5 Die Surjektivitäts-Falle

Im folgenden werfen wir einen zweiten Blick auf die Konstruktion aus Kapitel 3 des für Hauptsatz 1.3 benötigten R-Moduls M.
Wir werden für diesen speziellen Modul M einen Hilfssatz beweisen, der es unter gewissen Voraussetzungen erlaubt, aus der Surjektivität von Endomorphismen deren Bijektivität zu folgern. Dies wird sich im abschließenden Beweis von Hauptsatz 1.3 als zentrales Hilfsmittel erweisen.

Hierbei ist es unumgänglich, sich die einzelnen Konstruktionselemente des Moduls M wieder ins Gedächtnis zu rufen, namentlich:

- die RF-Konstruktion (Lemma 3.2)
- die Freie UT-Konstruktion (Satz 2.16), bestehend aus
  - dem Hinzufügen von Baby-Automorphismen (Lemma 2.12)
  - Dom- und Im-pushouts (Lemma 2.14)
  - dem Bilden des Supremum (Lemma 2.15)
- die Stufen-Konstruktion (Stufen-Lemma 3.4)

Das folgende Lemma beschäftigt sich hierbei
zunächst eingehender mit der UT-Konstruktion.

Für eine absolut freie Gruppe $\langle\mathfrak{F}\rangle$ mit Basis $\mathfrak{F}$ bezeichne im folgenden
$\mathfrak{F}_\pm := \{x |\ x \in \mathfrak{F} \vee x^{-1} \in \mathfrak{F}\}$. Es stehe $f := \sum_{i=1}^n r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}\rangle$ mit $r_i \in R$, $\mu_i \in \langle\mathfrak{F}\rangle$ immer für ein Polynom in seiner reduzierten Darstellung, d.h. es sind alle $r_i \neq 0$ und alle μ_i paarweise verschieden und reduziert.
Für ein $\mathfrak{x} = (M^\mathfrak{x}, \mathfrak{F}^\mathfrak{x}, \pi^\mathfrak{x}) \in \mathfrak{K}$ und ein $f = \sum_{i=1}^n r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}^\mathfrak{x}\rangle$ bezeichne $f^\mathfrak{x} = \sum_{i=1}^n r_i\mu_i^\mathfrak{x}$ den Homomorphismus mit $\operatorname{Dom} f^\mathfrak{x} = \bigcap_{i=1}^n \operatorname{Dom} \mu_i^\mathfrak{x} \subseteq M^\mathfrak{x}$.

Lemma 5.1 *Gegeben seien ein Tripel $\mathfrak{x} = (M^\mathfrak{x}, \mathfrak{F}^\mathfrak{x}, \pi^\mathfrak{x}) \in \mathfrak{A}$, ein Untermodul $M' \subseteq_* M^\mathfrak{x}$ und ein $\mathfrak{F}' \subseteq \mathfrak{F}^\mathfrak{x}$ mit der zusätzlichen Eigenschaft:*

Für alle $0 \neq f = \sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$ *und* $x \in M^{\mathfrak{x}}$ *folgt aus* $x\mu_i^{\mathfrak{x}} \notin M'$ *für alle* $1 \leq i \leq n$, *daß auch* $xf^{\mathfrak{x}} \notin M'$ *ist.*

Es entstehe $\mathfrak{x} \sqsubseteq \mathfrak{y} = (M^{\mathfrak{y}}, \mathfrak{F}^{\mathfrak{y}}, \pi^{\mathfrak{y}}) \in \mathfrak{A}$ *durch Anwendung der* UT-*Konstruktion. Dann gilt:*

Für alle $0 \neq f = \sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$ *und* $x \in M^{\mathfrak{y}}$ *folgt aus* $x\mu_i^{\mathfrak{y}} \notin M'$ *für alle* $1 \leq i \leq n$, *daß auch* $xf^{\mathfrak{y}} \notin M'$ *ist.*

Beweis: Das Anwenden der UT-Konstruktion auf $\mathfrak{x}$ liefert eine stetige Kette $(\mathfrak{x}^{\alpha})_{\alpha\in\lambda}$ in $(\mathfrak{K}, \sqsubseteq)$ mit $\mathfrak{x}^0 := \mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^{\lambda} := \mathfrak{y} = \bigcup_{\alpha\in\lambda} \mathfrak{x}^{\alpha}$ für ein $\lambda \in$ LORD, deren Elemente ausschließlich durch Hinzufügen von Baby-Automorphismen, Dom- und Im-pushouts, sowie dem Bilden des Supremum generiert wurden.
Im folgenden sei immer $\mathfrak{x}^{\alpha} := (M^{\alpha}, \mathfrak{F}^{\alpha}, \pi^{\alpha})$ und $f^{\alpha} := \pi^{\alpha}(f)$ für alle $0 \leq \alpha \leq \lambda$, $f \in R\langle\mathfrak{F}^{\alpha}\rangle$.

Es werden nun durch transfinite Induktion die folgenden beiden Aussagen für alle Ordinalzahlen $0 \leq \alpha \leq \lambda$ bewiesen:

(a) Für alle $f = \sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$, $\varphi \in \mathfrak{F}'_{\pm}$ und $x \in M^{\alpha}$ folgt aus $x\mu_i^{\alpha} \notin \operatorname{Dom}\varphi^{\alpha}$ für alle $1 \leq i \leq n$, daß auch $xf^{\alpha} \notin \operatorname{Dom}\varphi^{\alpha}$ ist.
(b) Für alle $f = \sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$ und $x \in M^{\alpha}$ folgt aus $x\mu_i^{\alpha} \notin M'$ für alle $1 \leq i \leq n$, daß auch $xf^{\alpha} \notin M'$ ist.

Für $\alpha = \lambda$ beweist Aussage (b) das Lemma.

zu (a): Für $\alpha = 0$ ist die Aussage trivial, da $x\mu_i^0 \in M^0 = \operatorname{Dom}\varphi^0$ aus $\mathfrak{x}^0 = \mathfrak{x} \in \mathfrak{A} \Longrightarrow \varphi^0 \in \operatorname{Aut} M^0$ für alle $1 \leq i \leq n$ folgt.
Es sei nun $0 < \alpha \leq \lambda$ und die Aussage bereits für alle $\alpha' < \alpha$ bewiesen. Angenommen, es gäbe ein $0 \neq f = \sum_{i=1}^{n} r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$, ein $\varphi \in \mathfrak{F}'_{\pm}$ und ein $x \in M^{\alpha}$ mit $x\mu_i^{\alpha} \notin \operatorname{Dom}\varphi^{\alpha}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^{\alpha} \in \operatorname{Dom}\varphi^{\alpha}$.
Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle anhand der in der UT-Konstruktion benutzten Konstruktionselemente:

Fall 1: Es ist $\alpha \in$ LORD.
Insbesondere ist dann $\mathfrak{x}^\alpha = \bigcup_{\alpha'<\alpha} \mathfrak{x}^{\alpha'}$ und es existiert ein $\beta < \alpha$ mit $x \in M^\beta$, $x \in \operatorname{Dom} \mu_i^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^\beta \in \operatorname{Dom} \varphi^\beta$.
Es ist somit bereits $x \in M^\beta$ mit $x\mu_i^\beta = x\mu_i^\alpha \notin \operatorname{Dom} \varphi^\beta \subseteq \operatorname{Dom} \varphi^\alpha$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^\beta = xf^\alpha \in \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.

Fall 2: Es ist $\alpha = \beta + 1$ und $\mathfrak{x}^\alpha$ entsteht aus $\mathfrak{x}^\beta$ durch Hinzufügen eines partiellen Automorphismus η^α. Insbesondere ist $M^\alpha = M^\beta$.
Offensichtlich ist $\eta \notin \mathfrak{F}'$ und $g^\alpha = g^\beta$ für alle $g \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ als Graph.
Es ist somit bereits $x \in M^\beta = M^\alpha$ mit $x\mu_i^\beta = x\mu_i^\alpha \notin \operatorname{Dom} \varphi^\alpha = \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^\beta = xf^\alpha \in \operatorname{Dom} \varphi^\alpha = \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.

Fall 3: Es ist $\alpha = \beta + 1$ und $\mathfrak{x}^\alpha$ entsteht aus $\mathfrak{x}^\beta$ durch ein Dom- bzw. Im-pushout eines Elementes $\eta' \in \mathfrak{F}^\beta$. Insbesondere ergibt sich $\mathfrak{x}^\alpha$ aus $\mathfrak{x}^\beta$ durch ein geeignetes Dom-pushout eines partiellen Automorphismus η^β mit $\eta \in \mathfrak{F}^\beta_\pm$; es ist $\mathfrak{F}^\alpha = \mathfrak{F}^\beta$, $M^\beta \subseteq_* M^\alpha$, $\operatorname{Dom} \eta^\alpha = M^\beta$ und $\operatorname{Im} \eta^\alpha \cap M^\beta = \operatorname{Im} \eta^\beta$ laut Lemma 2.14.
Dieser Fall splittet im folgenden in zwei Unterfälle, die näher auf das Aussehen von $f \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ eingehen.

Fall 3.A: Es sei $x \in \operatorname{Dom} \mu_i^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist $x \in M^\beta$.
1.) Ist $\varphi \notin \{\eta, \eta^{-1}\}$, so ist $\varphi^\alpha = \varphi^\beta$ und bereits $x \in M^\beta$ mit $x\mu_i^\beta = x\mu_i^\alpha \notin \operatorname{Dom} \varphi^\alpha = \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^\beta = xf^\alpha \in \operatorname{Dom} \varphi^\alpha = \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.
2.) Ist $\varphi = \eta$, so gilt $x\mu_i^\alpha = x\mu_i^\beta \in M^\beta = \operatorname{Dom} \varphi^\alpha$ für alle $1 \leq i \leq n$ im Widerspruch zu $x\mu_i^\alpha \notin \operatorname{Dom} \varphi^\alpha$.
3.) Ist $\varphi = \eta^{-1}$, so ist bereits $x \in M^\beta$ mit $x\mu_i^\beta = x\mu_i^\alpha \notin \operatorname{Dom} \varphi^\beta \subseteq \operatorname{Dom} \varphi^\alpha$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $xf^\beta = xf^\alpha \in \operatorname{Dom} \varphi^\alpha \cap M^\beta = \operatorname{Im} \eta^\alpha \cap M^\beta = \operatorname{Im} \eta^\beta = \operatorname{Dom} \varphi^\beta$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.
Fazit: In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Fall 3.B: Es existiere ein $1 \leq j \leq n$ mit $x \notin \operatorname{Dom} \mu_j^\beta$.

Dann ist $I := \{1 \leq i \leq n | \; x \notin \operatorname{Dom} \mu_i^\beta\} \neq \emptyset$ wegen $j \in I$.

Für ein beliebiges $1 \leq i \leq n$ sei $\mu_i = \xi_1 \eta^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \eta^{\varepsilon_{k-1}} \xi_k$ mit $0 \neq \varepsilon_{i'} \in \mathbb{Z}$ und $\xi_{i'} \in \langle \mathfrak{F}' \setminus \{\eta, \eta^{-1}\} \rangle$ als reduzierte Darstellung gegeben.

1.) Ist $\eta \notin \mathfrak{F}'_\pm$, so gilt $\mu_i^\beta = \mu_i^\alpha \Longrightarrow x \in \operatorname{Dom} \mu_i^\alpha = \operatorname{Dom} \mu_i^\beta \subseteq M^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$ mit $\mu_i \neq 1$. **(1)**

Aus (1) folgt zunächst $\mu_j = 1$ und somit $x \notin \operatorname{Dom} \mu_j^\beta = \operatorname{Dom} 1^\beta = M^\beta$. Mit (1) ergibt sich nun desweiteren $f = r$ für ein $0 \neq r \in R$ als reduzierte Darstellung.

Es folgt $xf^\alpha = rx \notin M^\beta \subseteq_* M^\alpha$ im Widerspruch zur Annahme $xf^\alpha \in \operatorname{Dom} \varphi^\alpha = \operatorname{Dom} \varphi^\beta \subseteq M^\beta$.

2.) Ist $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x \in M^\beta$, so folgt:

a) Es sei $x\mu_i^\alpha \in M^\beta$ für ein $i \in I$. Dann folgt $x \in \operatorname{Dom} \mu_i^\beta$ aus $x \in M^\beta$ und $x\mu_i^\alpha \in M^\beta$ analog zum Beweis von Lemma 2.14 (a), Beweispunkt 3.), Fall 1.

Dies widerspricht $i \in I$.

Es gelte daher im folgenden: Für alle $i \in I$ ist $x\mu_i^\alpha \notin M^\beta$. **(2)**

b) Für alle $i \in I$ gilt $\xi_k = 1$ und $\varepsilon_{k-1} > 0$ in der reduzierten Darstellung von μ_i. **(3)**

Beweis: Für $\xi_k \neq 1$ folgt $\xi_k^\alpha = \xi_k^\beta \Longrightarrow x\mu_i^\alpha \in \operatorname{Im} \xi_k^\alpha = \operatorname{Im} \xi_k^\beta \subseteq M^\beta$ im Widerspruch zu (2). Es sei daher im folgenden $\xi_k = 1$ und $\mu_i = \xi_1 \eta^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \eta^{\varepsilon_{k-1}}$ die reduzierte Darstellung von μ_i.

Ist $\varepsilon_{k-1} < 0$, so folgt $x\mu_i^\alpha \in \operatorname{Im} (\eta^\alpha)^{-1} = \operatorname{Dom} \eta^\alpha = M^\beta$ im Widerspruch zu (2).

Ist $\varepsilon_{k-1} = 0$, so vereinfacht sich die reduzierte Darstellung von μ_i zu $\mu_i = \xi_1$. Für $\xi_1 \neq 1$ gilt $\xi_1^\alpha = \xi_1^\beta \Longrightarrow x\mu_i^\alpha \in \operatorname{Im} \xi_1^\alpha = \operatorname{Im} \xi_1^\beta \subseteq M^\beta$, während $x\mu_i^\alpha = x \in M^\beta$ für $\xi_1 = 1$ gilt, was jeweils (2) widerspricht.

c) Mit (3) läßt sich $\mu_i^\alpha = \mu_i'^\alpha \eta^\alpha$ für alle $i \in I$ schreiben, wobei $\mu_i' := \xi_1 \eta^{\varepsilon_1} \xi_2 \cdots \eta^{\varepsilon_{k-1}-1}$ in reduzierter Schreibweise definiert ist. **(4)**

Laut Voraussetzung ist $\sum_{i \in I} r_i \mu_i = (\sum_{i \in I} r_i \mu_i')\eta$ ein Polynom in reduzierter Schreibweise, weshalb auch $0 \neq f' := \sum_{i \in I} r_i \mu_i' \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ ein Polynom in reduzierter Schreibweise ist.

d) Ist $\varphi = \eta^{-1}$, so folgt $x\mu_j^\alpha \in \operatorname{Im} \eta^\alpha = \operatorname{Dom} (\eta^\alpha)^{-1} = \operatorname{Dom} \varphi^\alpha$ mit (4) im Widerspruch zur Annahme $x\mu_j^\alpha \notin \operatorname{Dom}\varphi^\alpha$. Es sei daher im folgenden $\varphi \neq \eta^{-1}$.

Ist $\varphi \notin \{\eta, \eta^{-1}\}$, so gilt $\operatorname{Dom}\varphi^\alpha = \operatorname{Dom}\varphi^\beta \subseteq M^\beta$.

Ist $\varphi = \eta$, so gilt $\operatorname{Dom}\varphi^\alpha = M^\beta$.

Insgesamt folgt: $\operatorname{Dom}\varphi^\alpha \subseteq M^\beta$. **(5)**

e) Für alle $i \in I$ ist $x \in \operatorname{Dom}\mu_i'^\beta$ mit $x\mu_i'^\beta \notin \operatorname{Dom}\eta^\beta$. **(6)**

Beweis: Mit (4) folgt $x\mu_i'^\alpha \in \operatorname{Dom}\eta^\alpha = M^\beta$. Damit ergibt sich $x \in \operatorname{Dom}\mu_i'^\beta$ aus $x \in M^\beta$ und $x\mu_i'^\alpha \in M^\beta$ analog zum Beweis von Lemma 2.14 (a), Beweispunkt 3.), Fall 1.

Desweiteren ist $x\mu_i'^\alpha\eta^\alpha \notin M^\beta \Longrightarrow x\mu_i'^\alpha\eta^\alpha \notin \operatorname{Im}\eta^\beta \subseteq M^\beta \Longrightarrow x\mu_i'^\beta = x\mu_i'^\alpha \notin \operatorname{Dom}\eta^\beta$ mit (2).

f) Es ist $xf'^\beta \in \operatorname{Dom}\eta^\beta$. **(7)**

Beweis: Mit (6) ist xf'^β wohldefiniert. Laut Definition der Indexmenge I ist

$x \in \operatorname{Dom}\mu_i^\beta \Longrightarrow x\mu_i^\alpha = x\mu_i^\beta \in M^\beta$ für alle $i \notin I$. Somit gilt

$xf^\alpha = x(\sum_{i\in I} r_i\mu_i^\alpha) + x(\sum_{i\notin I} r_i\mu_i^\alpha) \in \operatorname{Dom}\varphi^\alpha \subseteq M^\beta \Longrightarrow$

$x(\sum_{i\in I} r_i\mu_i^\alpha) = xf^\alpha - x(\sum_{i\notin I} r_i\mu_i^\alpha) \in M^\beta \Longrightarrow xf'^\alpha\eta^\alpha \in \operatorname{Im}\eta^\alpha \cap M^\beta = \operatorname{Im}\eta^\beta$

$\Longrightarrow xf'^\beta = xf'^\alpha \in \operatorname{Dom}\eta^\beta$ laut Voraussetzung an f und (5).

g) Mit (6) und (7) folgt abschließend:

Es ist $x \in M^\beta$ mit $x\mu_i'^\beta \notin \operatorname{Dom}\eta^\beta$ für alle $i \in I$ und $xf'^\beta \in \operatorname{Dom}\eta^\beta$, wobei $f' \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$ und $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$. Dies ist ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.

3.) Ist $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x \notin M^\beta$, so folgt:

a) Für alle $1 \leq i \leq n$ gilt $\xi_1 = 1$ und $\varepsilon_1 \leq 0$ in der reduzierten Darstellung von μ_i. **(8)**

Beweis: Für $\xi_1 \neq 1$ folgt $\xi_1^\alpha = \xi_1^\beta \Longrightarrow x \in \operatorname{Dom}\xi_1^\alpha = \operatorname{Dom}\xi_1^\beta \subseteq M^\beta$ im Widerspruch zu $x \notin M^\beta$. Es sei daher im folgenden $\xi_1 = 1$ und $\mu_i = \eta^{\varepsilon_1}\xi_2\cdots\eta^{\varepsilon_{k-1}}\xi_k$ die reduzierte Darstellung von μ_i.

Ist $\varepsilon_1 > 0$, so folgt $x \in \operatorname{Dom}\eta^\alpha = M^\beta$ im Widerspruch zu $x \notin M^\beta$.

b) Es ist $x \in \operatorname{Dom}(\eta^\alpha)^{-1}$. **(9)**

Beweis: Laut (8) gilt für jedes $1 \leq i \leq n$ entweder $\mu_i = 1$,

oder $\mu_i = \eta^{\varepsilon_1}\xi_2\cdots\eta^{\varepsilon_{k-1}}\xi_k$ mit $\varepsilon_1 < 0$.

Ist $\mu_i = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, so ergibt sich $f = r$ für ein $0 \neq r \in R$ als reduzierte Darstellung. Es folgt nun $x = x1^\alpha \notin \operatorname{Dom}\varphi^\alpha \sqsubseteq M^\alpha \Longrightarrow xf^\alpha = rx \notin \operatorname{Dom}\varphi^\alpha$ laut Voraussetzung an f, was zugleich der Annahme $xf^\alpha \in \operatorname{Dom}\varphi^\alpha$ widerspricht.

Also existiert ein $1 \leq i \leq n$ mit $\mu_i = \eta^{\varepsilon_1}\xi_2 \cdots \eta^{\varepsilon_{k-1}}\xi_k$ und $\varepsilon_1 < 0$, womit offensichtlich $x \in \mathrm{Dom}\,(\eta^\alpha)^{-1}$.

c) Mit (9) ist $x' := x(\eta^\alpha)^{-1} \in \mathrm{Dom}\,\eta^\alpha = M^\beta$ wohldefiniert. Desweiteren ist mit f auch $0 \neq f' := \eta f = \sum_{i=1}^n r_i \eta \mu_i = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i' \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ mit $\mu_i' := \eta \mu_i$ ein Polynom in reduzierter Darstellung.

Abschließend folgt: Es sind $f' = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i' \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$, $\varphi \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x' \in M^\alpha$ gegeben mit $x' \mu_i'^\alpha = x \mu_i^\alpha \notin \mathrm{Dom}\,\varphi^\alpha$ und $x' f'^\alpha = x f^\alpha \in \mathrm{Dom}\,\varphi^\alpha$, wobei zusätzlich $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x' \in M^\beta$ gilt. Somit läßt sich Fall 3.) auf Fall 2.) zurückführen, was wieder zu einem Widerspruch zur Induktionsannahme führt.

Fazit: Die Annahme, es gäbe ein $f = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$, ein $\varphi \in \mathfrak{F}'_\pm$ und ein $x \in M^\alpha$ mit $x \mu_i^\alpha \notin \mathrm{Dom}\,\varphi^\alpha$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $x f^\alpha \in \mathrm{Dom}\,\varphi^\alpha$, führt in allen erdenklichen Fällen zu einem Widerspruch. Gilt Aussage (a) für alle $\alpha' < \alpha \leq \lambda$, so gilt (a) also auch für α.

Somit beweist transfinite Induktion Aussage (a).

zu (b): Für $\alpha = 0$ ist die Aussage laut Voraussetzung des Lemmas erfüllt.

Es sei nun $0 < \alpha \leq \lambda$ und die Aussage bereits für alle $\alpha' < \alpha$ bewiesen. Angenommen, es gäbe ein $0 \neq f = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ und ein $x \in M^\alpha$ mit $x \mu_i^\alpha \notin M'$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $x f^\alpha \in M'$.

Wir bedienen uns im folgenden derselben Fallunterscheidung wie in (a). Der Beweis von (b) stimmt dadurch über große Passagen mit dem Beweis von (a) wörtlich überein, sodaß im folgenden nur diejenigen Unterpunkte der Fallunterscheidung er–wähnt werden, die von der Vorlage in (a) abweichen:

Fall 3.A: Es sei $x \in \mathrm{Dom}\,\mu_i^\beta$ für alle $1 \leq i \leq n$. Insbesondere ist $x \in M^\beta$.

Es ist somit bereits $x \in M^\beta$ mit $x \mu_i^\beta = x \mu_i^\alpha \notin M'$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $x f^\beta = x f^\alpha \in M'$ im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung für $\beta < \alpha$.

Fall 3.B: Es existiere ein $1 \leq j \leq n$ mit $x \notin \mathrm{Dom}\,\mu_j^\beta$.

1.) Ist $\eta \notin \mathfrak{F}'_\pm$, ergibt sich diesmal ein Widerspruch zur Annahme $xf^\alpha \in M' \subseteq M^\beta$.

2.) Ist $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x \in M^\beta$, so folgt:

d) Entfällt. Die hier in (a) bewiesene Aussage $\mathrm{Dom}\,\varphi^\alpha \subseteq M^\beta$ wird in (b) sinngemäß durch die banale Aussage $M' \subseteq M^\beta$ ersetzt.

f) Diesmal folgert man

$xf^\alpha = x(\sum_{i\in I} r_i\mu_i^\alpha) + x(\sum_{i\notin I} r_i\mu_i^\alpha) \in M' \subseteq M^\beta \Longrightarrow$

$x(\sum_{i\in I} r_i\mu_i^\alpha) = xf^\alpha - x(\sum_{i\notin I} r_i\mu_i^\alpha) \in M^\beta \Longrightarrow xf'^\alpha\eta^\alpha \in \mathrm{Im}\,\eta^\alpha \cap M^\beta = \mathrm{Im}\,\eta^\beta$

$\Longrightarrow xf'^\beta = xf'^\alpha \in \mathrm{Dom}\,\eta^\beta$ laut Voraussetzung an f.

g) Mit (6) und (7) folgt abschließend:

Es ist $x \in M^\beta$ mit $x\mu_i'^\beta \notin \mathrm{Dom}\,\eta^\beta$ für alle $i \in I$ und $xf'^\beta \in \mathrm{Dom}\,\eta^\beta$, wobei $f' \in R\langle\mathfrak{F}'\rangle$ und $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$. Dies widerspricht aber (a).

3.) Ist $\eta \in \mathfrak{F}'_\pm$ und $x \notin M^\beta$, so folgt:

b) Ist $\mu_i = 1$ für alle $1 \le i \le n$, so folgt diesmal laut Voraussetzung an f

$x = x1^\alpha \notin M' \subseteq_* M^\alpha \Longrightarrow xf^\alpha = rx \notin M'$, was zugleich der Annahme $xf^\alpha \in M'$ widerspricht.

Fazit: Somit beweist transfinite Induktion Aussage (b). □

Es werden nun die Überlegungen auf die gesamte Konstruktion des R-Moduls M, wie sie in Kapitel 3 beschrieben wurde, ausgedehnt. Zur Erinnerung:

Modul M ergibt sich als Supremum $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ einer stetigen Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in $(\mathfrak{A}, \subseteq)$, wobei die Elemente $\mathfrak{x}_\alpha = (M_\alpha, \mathfrak{F}_\alpha, \pi_\alpha)$ wie auf Seite 29 beschrieben konstruiert werden.

Ist insbesondere $\alpha = \beta + 1$, so entsteht $\mathfrak{x}_\alpha$ aus $\mathfrak{x}_\beta$ entweder direkt durch Stufen-Konstruktion oder durch RF-Konstruktion und anschließende UT-Konstruktion über ein Zwischenelement $\mathfrak{y}_\beta = (M'_\beta, \mathfrak{F}_\beta, \pi'_\beta)$.

Wir setzen $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{x}_\alpha$.

Lemma 5.2 *Modul $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ sei wie auf Seite 29 beschrieben konstruiert.*
Für ein Zwischenelement $\mathfrak{y}_\beta = (M'_\beta, \mathfrak{F}_\beta, \pi'_\beta)$ der stetigen Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ seien ein $x \in M$ und ein $0 \neq f \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ mit $xf^\mathfrak{x} \in M'_\beta$ gegeben.

Dann gilt: $x \in M'_\beta$.

Beweis: Wir setzen $\mathfrak{x}_\kappa = (M_\kappa, \mathfrak{F}_\kappa, \pi_\kappa) := \mathfrak{x} = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{x}_\alpha$.
Im folgenden sei immer $f^\alpha := \pi_\alpha(f)$ für alle $\alpha \leq \kappa$, $f \in R\langle\mathfrak{F}_\alpha\rangle$.
Der Beweis des Lemmas erfolgt, indem durch transfinite Induktion die folgende Aussage für alle Ordinalzahlen $\beta \leq \alpha \leq \kappa$ bewiesen wird:

Für alle $0 \neq f = \sum_{i=1}^n r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ und $x \in M_\alpha$
folgt $x \in M'_\beta$ aus $xf^\alpha \in M'_\beta$. **(*)**

Für $\alpha = \kappa$ beweist Aussage (*) das Lemma.

Für $\alpha = \beta$ ist die Aussage (*) trivial, da dann laut Voraussetzung bereits
$x \in M_\beta \subseteq M'_\beta$ gilt.
Es sei nun $\beta < \alpha \leq \kappa$ und die Aussage bereits für alle $\beta \leq \alpha' < \alpha$ bewiesen.
Desweiteren seien ein $0 \neq f = \sum_{i=1}^n r_i\mu_i \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ und ein $x \in M_\alpha$ mit $xf^\alpha \in M'_\beta$ gegeben.
Wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle anhand der in der Konstruktion von M benutzten Konstruktionselemente:

Fall 1: Es ist $\alpha \in$ LORD.
Insbesondere ist dann $\mathfrak{x}_\alpha = \bigcup_{\alpha'<\alpha} \mathfrak{x}_{\alpha'}$ und es existiert ein $\beta \leq \gamma < \alpha$, sodaß
$x \in M_\gamma = \mathrm{Dom}\, f^\gamma$ mit $\mathfrak{x}_\gamma \in \mathfrak{A}$.
Es ist somit bereits $x \in M_\gamma$ mit $xf^\gamma = xf^\alpha \in M'_\beta$, woraus $x \in M'_\beta$ laut Induktions–voraussetzung für $\beta \leq \gamma < \alpha$ folgt.

Fall 2: Es ist $\alpha = \gamma + 1$ und $\mathfrak{x}_\alpha$ entsteht aus $\mathfrak{x}_\gamma$ durch Anwenden der RF- und der UT-Konstruktion. Insbesondere gilt $\mathfrak{x}_\gamma \sqsubseteq \mathfrak{y}_\gamma \sqsubseteq \mathfrak{x}_\alpha$, wobei $\mathfrak{y}_\gamma$ aus $\mathfrak{x}_\gamma$ durch RF-Konstruktion und $\mathfrak{x}_\alpha$ aus $\mathfrak{y}_\gamma$ durch UT-Konstruktion entsteht.
1.) Es ist $\mathfrak{y}_\gamma \in \mathfrak{A}$. **(1)**
Beweis: Es ist $\mathfrak{x}_\gamma \in \mathfrak{A}$. Mit Lemma 3.2 ist $\mathfrak{y}_\gamma \in \mathfrak{K}$ mit
$\pi'_\gamma(\varphi_t) = \pi_\gamma(\varphi_t) \times \varphi_t \in \ \mathrm{Aut}\, M_\gamma \times \mathrm{Aut}\, R\langle\mathfrak{F}_\gamma\rangle \subseteq \ \mathrm{Aut}\, M'_\gamma$ für alle $\varphi_t \in \mathfrak{F}_\gamma$, also $\mathfrak{y}_\gamma \in \mathfrak{A}$.

2.) Es ist $x \in M'_\gamma$. **(2)**

Beweis: Mit (1) ergibt sich $\mathfrak{x}_\alpha \in \mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{y}_\gamma \in \mathfrak{A}$ durch UT-Konstruktion. Für $\mathfrak{x} = (M^\mathfrak{x}, \mathfrak{F}^\mathfrak{x}, \pi^\mathfrak{x}) := \mathfrak{y}_\gamma$, $M' := M^\mathfrak{x} = M'_\gamma$, $\mathfrak{F}' := \mathfrak{F}^\mathfrak{x} = \mathfrak{F}_\gamma$ und $\mathfrak{y} := \mathfrak{x}_\alpha$ sind offensichtlich alle Voraussetzungen des Lemmas 5.1 erfüllt.

Zudem ist $0 \neq f = \sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in R\langle \mathfrak{F}_\beta \rangle \subseteq R\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle = R\langle \mathfrak{F}' \rangle$ und $x \in M_\alpha = M^\mathfrak{y}$ mit $xf^\mathfrak{y} = xf^\alpha \in M'_\beta \subseteq M'_\gamma = M'$. **(3)**

Wäre nun $x\mu_i^\alpha = x\mu_i^\mathfrak{y} \notin M' = M'_\gamma$ für alle $1 \leq i \leq n$, so folgte $xf^\mathfrak{y} \notin M'$ mit Lemma 5.1, was (3) widerspricht. Also existiert ein $1 \leq j \leq n$ mit $x\mu_j^\alpha \in M'_\gamma \Longrightarrow x \in M'_\gamma (\mu_j^\alpha)^{-1} = M'_\gamma$.

3.) Ist nun $\gamma = \beta$, so folgt $x \in M'_\beta$ direkt aus (2).

Im folgenden sei daher $\beta < \gamma$. Mit (2) läßt sich $x = (x_1, x_2) \in M'_\gamma = M_\gamma \times R\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle$ mit $x_1 \in M_\gamma$ und $x_2 \in R\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle$ schreiben. Aus $xf^\alpha = (x_1 f^\gamma, x_2 f) \in M'_\beta \subseteq M_\gamma$ folgt $x_2 f = 0 \Longrightarrow x_2 = 0$ mit $f \neq 0$. Also ist $x = x_1 \in M_\gamma$ mit $xf^\gamma = xf^\alpha \in M'_\beta$, woraus $x \in M'_\beta$ laut Induktionsvoraussetzung für $\beta < \gamma < \alpha$ folgt.

Fall 3: Es ist $\alpha = \gamma + 1$ und $\mathfrak{x}_\alpha$ entsteht aus $\mathfrak{x}_\gamma$ durch Anwenden der Stufen-Konstruk–tion. Insbesondere ist $\beta < \gamma$ und $M_\alpha = \langle M_\gamma, yR\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle^\gamma \rangle_{*p} \subseteq (\widehat{M_\gamma})_p$ für einen geeigneten Zweig $y \in (\widehat{M_\gamma})_p$ wie in Kapitel 4.

Für $x \in M_\alpha$ existieren daher ein $k \in \omega$, $x' \in M_\gamma$ und $g \in R\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle$ mit $p^k x = x' + yg^\gamma$ und für $0 \neq f \in R\langle \mathfrak{F}_\beta \rangle \subseteq R\langle \mathfrak{F}_\gamma \rangle$ folgt $xf^\alpha \in M'_\beta \Longrightarrow p^k x f^\alpha = x' f^\gamma + yg^\gamma f^\gamma \in M'_\beta \subseteq M_\gamma \Longrightarrow yg^\gamma f^\gamma = p^k x f^\alpha - x' f^\gamma \in M_\gamma \Longrightarrow gf = 0 \Longrightarrow g = 0$ mit Lemma 4.2 (b).

Also ist $p^k x = x' + yg^\gamma = x' \in M_\gamma \subseteq_{*p} (\widehat{M_\gamma})_p \Longrightarrow x \in M_\gamma$ mit $xf^\gamma = xf^\alpha \in M'_\beta$, woraus $x \in M'_\beta$ laut Induktionsvoraussetzung für $\beta < \gamma < \alpha$ folgt.

Fazit: Sind ein $0 \neq f \in R\langle \mathfrak{F}_\beta \rangle$ und ein $x \in M_\alpha$ mit $xf^\alpha \in M'_\beta$ gegeben, so folgt in allen Fällen $x \in M'_\beta$. Gilt Aussage (*) für alle $\beta \leq \alpha' < \alpha$, so gilt (*) also auch für α. Somit beweist transfinite Induktion Aussage (*). $\square$

Aus Lemma 5.2 ergibt sich nun als wichtige Folgerung die „Surjektivitäts-Falle“.

Satz 5.3 (Surjektivitäts-Falle)

Modul $M = \bigcup_{\alpha<\kappa} M_\alpha$ sei wie auf Seite 29 beschrieben konstruiert.

Für ein Zwischenelement $\mathfrak{y}_\beta = (M'_\beta, \mathfrak{F}_\beta, \pi'_\beta)$ der stetigen Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ sei ein $f \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ mit $M'_\beta \subseteq \operatorname{Im} f^{\mathfrak{x}}$ gegeben.

Dann gilt: $f \in R^* \times \langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ und $f^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{Aut} M$.

Beweis: Es sei ein $f \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ mit $M'_\beta \subseteq \operatorname{Im} f^{\mathfrak{x}}$ gegeben.
Insbesondere existiert ein $x \in M$ mit $xf^{\mathfrak{x}} = (0,1) \in M'_\beta = M_\beta \times R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$.
Mit Lemma 5.2 folgt $x \in M'_\beta$, sodaß sich $x = (x_1, x_2)$ mit $x_1 \in M_\beta$, $x_2 \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$ schreiben läßt. Es ergibt sich
$xf^{\mathfrak{x}} = (x_1, x_2)f^{\mathfrak{x}} = (x_1 f^\beta, x_2 f) = (0,1) \Longrightarrow x_2 f = 1 \Longrightarrow f \in R\langle\mathfrak{F}_\beta\rangle^* = R^* \times \langle\mathfrak{F}_\beta\rangle$.
Insbesondere gilt $f \in R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle \Longrightarrow f^{\mathfrak{x}} \in \operatorname{Aut} M$. □

6 Der Abschluß des Beweises

Es sei $\mathfrak{x} := (M, \mathfrak{F}, \pi) := \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{x}_\alpha$ wie in Kapitel 3 angegeben konstruiert.

Es sind nun alle Hilfsmittel vorhanden, um den Beweis von Hauptsatz 1.3 abzuschließen.

Hauptsatz 6.1 *Es sei* $\mathfrak{x} = (M, \mathfrak{F}, \pi) = \bigcup_{\alpha<\kappa} \mathfrak{x}_\alpha$ *wie auf Seite 29 beschrieben konstruiert. Dann gilt:*

(a) M ist ein stark κ-freier Modul der Kardinalität κ.

(b) Ist $\Phi \in \operatorname{End} M$ surjektiv, so folgt $\Phi \in \operatorname{Aut} M$.

(c) M ist ein UT-Modul mit $\operatorname{Aut} M = \pi(R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle)$.

Beweis:

zu (a): Dies folgt direkt aus Satz 3.7 (a) und (b).

zu (b): Es sei ein surjektives $\Phi \in \operatorname{End} M$ gegeben.

Mit Satz 3.7 (c) existieren nun eine stationäre Menge $E_\Phi \subseteq \kappa$ und eine Folge $(f_\alpha)_{\alpha \in E_\Phi}$ mit $f_\alpha \in R\langle \mathfrak{F}_\alpha \rangle$ so, daß $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha) \in \operatorname{End} M_\alpha$ für alle $\alpha \in E_\Phi$ surjektiv ist. **(1)**

1.) Für alle $\alpha \in E_\Phi$ ist $f_\alpha \in R^* \times \langle \mathfrak{F}_\alpha \rangle$. **(2)**

Beweis: Es sei ein $\alpha \in E_\Phi \subseteq \kappa^o$ gegeben.

Dann existiert für ein $\beta < \alpha$ ein Zwischenelement $\mathfrak{y}_\beta = (M'_\beta, \mathfrak{F}_\beta, \pi'_\beta)$ der stetigen Kette $(\mathfrak{x}_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ in $(\mathfrak{A}, \subseteq)$ derart, daß $f_\alpha \in R\langle \mathfrak{F}_\beta \rangle$ gilt. Somit ist insbesondere $f_\alpha \in R\langle \mathfrak{F}_\beta \rangle$ mit $M'_\beta \subseteq M_\alpha = \operatorname{Im} \pi_\alpha(f_\alpha) \subseteq \operatorname{Im} f_\alpha^{\mathfrak{x}}$ laut (1).

Satz 5.3 liefert $f_\alpha \in R^* \times \langle \mathfrak{F}_\beta \rangle \subseteq R^* \times \langle \mathfrak{F}_\alpha \rangle$.

2.) Es ist $\Phi \in \operatorname{Aut} M$:

Mit (2) ist $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha) \in \pi_\alpha(R^* \times \langle \mathfrak{F}_\alpha \rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M_\alpha$ für alle $\alpha \in E_\Phi$, somit $\Phi = \bigcup_{\alpha \in E_\Phi} \pi_\alpha(f_\alpha) \in \operatorname{Aut} M$.

zu (c): Es sei ein $\Phi \in \operatorname{Aut} M$ gegeben.

Mit Satz 3.7 (c) und (2) existieren nun eine stationäre Menge $E_\Phi \subseteq \kappa$ und eine Folge $(f_\alpha)_{\alpha \in E_\Phi}$ mit $f_\alpha \in R^* \times \langle \mathfrak{F}_\alpha \rangle \subseteq R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle$ so, daß $\Phi \restriction M_\alpha = \pi_\alpha(f_\alpha) \in \operatorname{Aut} M_\alpha$ für alle $\alpha \in E_\Phi$ ist. **(3)**

Mit Satz 3.7 operiert $\pi(R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle) \subseteq \operatorname{Aut} M$ scharf transitiv auf $\mathfrak{p}M$. **(4)**

Ist insbesondere für ein $\beta \in E_\Phi$ ein $x \in \mathfrak{p}M_\beta \subseteq \mathfrak{p}M$ gegeben, so gilt mit (3) und (4) $x\pi_\beta(f_\beta) = x\Phi = x\pi_\alpha(f_\alpha) \implies xf_\beta^{\mathfrak{x}} = xf_\alpha^{\mathfrak{x}} \implies f_\beta = f_\alpha$ für alle $\beta \leq \alpha \in E_\Phi$ laut

U-Eigenschaft. Somit ist Folge $(f_\alpha)_{\alpha\in E_\Phi}$ konstant und es folgt

$\Phi = \bigcup_{\alpha\in E_\Phi} \pi_\alpha(f_\alpha) = \bigcup_{\beta\leq\alpha\in E_\Phi} \pi_\alpha(f_\beta) = f_\beta^{\mathfrak{x}} \in \pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle)$ für jedes $\beta \in E_\Phi$.

Fazit: Es gilt $\operatorname{Aut} M \subseteq \pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle)$, während $\operatorname{Aut} M \supseteq \pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle)$ trivial ist. Somit folgt $\operatorname{Aut} M = \pi(R^* \times \langle\mathfrak{F}\rangle)$, mit (4) ist M ein UT-Modul. $\square$

7 Weiterführende Diskussion

In diesem abschließenden Kapitel werden einige naheliegende Verallgemeinerungen des Hauptsatzes 1.3 diskutiert.

7.1 Vollständig diskrete Bewertungsringe

Für Hauptsatz 1.3 wurde ein PID R mit $R \neq \widehat{R}_p$ für ein $p \in P(R)$ vorausgesetzt. Dies entspricht der für das Stufen-Lemma erforderlichen Cotorsionsfreiheit des Ringes R. Es bleibt die Frage zu klären, wie es um die übrigen Fälle bestellt ist:

1. Für den PID R ist $P(R) = \emptyset$.

2. Für den PID R ist $R = \widehat{R}_p$ mit einem $p \in P(R) \neq \emptyset$.

Im ersten Fall ist der PID R ein Körper, im zweiten Fall ist er ein vollständiger, lokaler Ring.

Definition 7.1 *Wir bezeichnen einen PID R mit $R = \widehat{R}_p$ für ein $p \in P(R) \neq \emptyset$ als einen* **vollständig diskreten Bewertungsring***.*

Es gilt nun der folgende bemerkenswerte Satz.

Satz 7.2 *Es sei R ein Körper bzw. vollständig diskreter Bewertungsring und $M \neq 0$ ein R-Modul. Dann besitzt M einen zyklischen direkten Summanden, d.h. $M = Rm \oplus M'$ für ein $m \in M$, $M' \subseteq M$.*

Beweis:
Fall 1: R ist ein Körper. Dann ist jeder R-Modul ein R-Vektorraum, womit $M \neq 0$ in eine direkte Summe von Kopien von R zerfällt.
Fall 2: R ist ein vollständig diskreter Bewertungsring.
Hierzu siehe [11, Section 16, Corollary 1, S. 53]. □

Mit Satz 7.2 läßt sich für einen Körper bzw. vollständig diskreten Bewertungsring direkt die Klasse aller UT-Moduln vom Typ 0 bestimmen.

Lemma 7.3 *Es sei R ein Körper bzw. vollständig diskreter Bewertungsring und $M \neq 0$ ein UT-Modul vom Typ 0. Dann ist $M \cong R$.*

Beweis: Es sei ein UT-Modul $M \neq 0$ vom Typ 0 gegeben.
Dann ist M insbesondere torsionsfrei. Mit Satz 7.2 läßt sich $M = Rm \oplus M' \cong R \oplus M'$ für ein $m \in M$, $M' \subseteq M$ schreiben. Hierbei ist $M' = 0$ nach Proposition 1.4, also $M \cong R \oplus M' = R$. □

Hauptsatz 6.1 und Lemma 7.3 lassen sich wiefolgt zusammenfassen:

Hauptsatz 7.4 *Gegeben sei ein PID R. Für eine reguläre, nicht schwach kompakte Kardinalzahl $|R| < \kappa$ existiert unter V=L genau dann ein UT-Modul M vom Typ 0 mit Kardinalität κ, wenn R weder ein Körper, noch ein vollständig diskreter Bewertungsring ist.*

7.2 Scharfe n-Transitivität

In Kapitel 1 bezeichneten wir einen R-Modul M als scharf transitiv, falls zu jedem Paar (x, y) von Elementen $x, y \in \mathfrak{p}M$ genau ein Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ mit $x\varphi = y$ existiert. Die Frage nach Existenz und Konstruktion scharf transitiver R-Moduln wurde daraufhin der Schwerpunkt dieser Diplomarbeit.
Es liegt nun nahe, diese Definition und das damit verbundene Konstruktionsproblem für n Paare $(x_i, y_i) \in \mathfrak{p}M \times \mathfrak{p}M$ zu formulieren ($n \in \mathbb{N}$):
Gibt es einen R-Modul M, sodaß für jede Vorgabe von n Paaren $(x_i, y_i) \in \mathfrak{p}M \times \mathfrak{p}M$ genau ein Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ mit $x_i\varphi = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ existiert?

In dieser Formulierung handelt es sich nicht um ein „gut gestelltes Problem“. Insbesondere gilt es, die folgenden drei Kriterien bei der Auswahl der Paare (x_i, y_i) zu berücksichtigen:

1. Die x_i sollten linear unabhängig sein, um $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ eindeutig zu bestimmen.

2. Die y_i sollten linear unabhängig sein, um die Existenz eines $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ zu ermöglichen.

3. Für jede Vorgabe von Ringelementen $r, r_i \in R$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \in rM \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} r_i y_i \in rM$$

für die Existenz eines $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ notwendig.

Dies alles führt zwangsläufig zu folgender Definition.

Definition 7.5 *Gegeben seien ein PID R, ein R-Modul M und ein* $n \in \mathbb{N}$. *Wir nennen M* **scharf n-transitiv**, *falls für jede Vorgabe von Untermoduln* $\bigoplus_{i=1}^{n} Rx_i \subseteq_* M$ *und* $\bigoplus_{i=1}^{n} Ry_i \subseteq_* M$ *genau ein Automorphismus* $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ *mit* $x_i\varphi = y_i$ *für alle* $1 \leq i \leq n$ *existiert.*

Für eine Kardinalzahl κ bezeichnen wir mit κ^+ ihre Nachfolgerkardinalzahl.
Die Vermutung, es könnte wie im Fall scharfer Transitivität zu jeder regulären, nicht schwach kompakten Kardinalzahl $|R| < \kappa$ ein stark κ-freier, scharf n-transitiver R-Modul M der Kardinalität κ existieren, ist falsch. Genauer gesagt gilt:

Satz 7.6 *Es sei R ein PID mit* $|R| = \kappa$ *und* $M \neq 0$ *ein* κ^+*-freier, scharf n-transitiver R-Modul. Dann ist M frei und* $\operatorname{rk} M \leq n$.

Beweis: Es sei ein κ^+-freier, scharf n-transitiver R-Modul M gegeben.
Wir wählen desweiteren einen reinen Untermodul $U := \bigoplus_{i=1}^{n} Rx_i \subseteq_* M$ und setzen $y_1 := -x_1$ und $y_i := x_i$ für $1 < i \leq n$. Insbesondere gilt
$\bigoplus_{i=1}^{n} Ry_i = R \cdot (-x_1) \oplus \bigoplus_{i=2}^{n} Rx_i = \bigoplus_{i=1}^{n} Rx_i = U \subseteq_* M$; da M scharf n-transitiv ist, existiert somit ein eindeutig bestimmter Automorphismus $\varphi \in \operatorname{Aut} M$ mit $x_i\varphi = y_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.
1.) Es ist $\varphi^2 = 1$. **(1)**
Beweis: Es gilt $x_1\varphi^2 = -x_1\varphi = x_1$ und $x_i\varphi^2 = x_i\varphi = x_i$ für $1 < i \leq n$. Die scharfe n-Transitivität von M erzwingt nun $\varphi^2 = 1$.
2.) $\operatorname{Ker}(\varphi - 1) = \langle x_i | \ 1 < i \leq n\rangle$. **(2)**
Beweis: Wir definieren $U' := \langle x_i | \ 1 < i \leq n\rangle$. Offensichtlich ist $U' \subseteq_* M$ mit $\operatorname{rk} U' = n - 1$. Desweiteren gilt $U' \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi - 1) \subseteq_* M$.

Gäbe es nun in $\mathrm{Ker}\,(\varphi - 1)$ ein zu $\{x_i |\ 1 < i \leq n\}$ linear unabhängiges Element, so folgt $\varphi = 1$ aus der scharfen n-Transitivität von M im Widerspruch zu $x_1\varphi = -x_1$. Also ist $U' \subseteq \mathrm{Ker}\,(\varphi - 1) \subseteq U'_* = U'$, woraus $\mathrm{Ker}\,(\varphi - 1) = U' = \langle x_i |\ 1 < i \leq n\rangle$ folgt.

3.) $\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\varphi + 1) < n$. **(3)**.

Beweis: Währe $\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\varphi + 1) \geq n$, so folgt $\varphi = -1$ aus der scharfen n-Transitivität von M im Widerspruch zu $x_2\varphi = x_2$.

4.) M ist ein freier R-Modul. **(4)**

Beweis: Angenommen, der κ^+-freie R-Modul M ist nicht frei. Dann existiert ein freier R-Modul $M' \subseteq M$ mit $\mathrm{rk}\, M' = \aleph_0$.

Mit (1) und (2) folgt für jedes $x \in M'$: $x(\varphi^2 - 1) = x(\varphi + 1)(\varphi - 1) = 0 \Longrightarrow$ $x(\varphi + 1) \in \mathrm{Ker}\,(\varphi - 1) = \langle x_i |\ 1 < i \leq n\rangle$. **(5)**

Ist insbesondere $\mathfrak{B}$ eine abzählbar unendliche Basis von M', so läßt sich mit (5) zu je n verschiedenen Basiselementen $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$ eine nichttriviale Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i(\varphi + 1) = 0$ finden. Wählt man ein $b \in \mathfrak{p}M$, $r \in R$ mit $rb = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \neq 0$, so ergibt sich: $rb\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \varphi = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = -rb \Longrightarrow b\varphi = -b \Longrightarrow b \in \mathrm{Ker}\,(\varphi + 1)$. Mit dieser Methode lassen sich aus $\mathfrak{B}$ abzählbar unendlich viele, linear unabhängige Elemente in $\mathrm{Ker}\,(\varphi + 1)$ konstruieren. Es folgt $\mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}\,(\varphi + 1) \geq \aleph_0$ im Widerspruch zu (3). M ist somit frei.

5.) $\mathrm{rk}\, M \leq n$. **(6)**

Analog zu Proposition 1.4 läßt sich beweisen, daß sich von einem scharf n-transitiven R-Modul des Typs 0 kein echter direkter Summand $\bigoplus_{i=1}^{n} R$ abspalten läßt. Mit (5) folgt insbesondere (6).

Offensichtlich sind alle freien R-Moduln M mit $\mathrm{rk}\, M \leq n$ scharf n-transitiv. $\square$

Somit ergibt sich für scharf n-transitive, κ^+-freie R-Moduln M eine Analogie zu den n-transitiven, unendlichen partiellen Ordnungen $(\Omega, \leq)$ aus [3, Theorem 4.14, S. 25]: Für $2 \leq n$ ist die Definition der scharfen n-Transitivität stark genug, um konkrete Aussagen über die algebraische Struktur des Moduls M zu erlauben.

7.3 Offene Probleme

1. Der UT-Modul M sei wie auf Seite 29 beschrieben mit $\operatorname{Aut} M = \pi(R^* \times \langle \mathfrak{F} \rangle)$ konstruiert. Gilt für M auch $\operatorname{End} M = \pi(R\langle \mathfrak{F} \rangle)$?

Ist diese Frage zu verneinen, so ist zu untersuchen, ob und wie eine Modifizierung der Konstruktion $\operatorname{End} M \cong R\langle \mathfrak{F} \rangle$ liefert.

2. Gegeben sei eine Gruppe G. Existiert ein UT-Modul M mit $\operatorname{Aut} M \cong G$?

Wie ist ggf. ein solcher UT-Modul zu konstruieren?

3. Gegeben sei ein Ring S. Existiert ein UT-Modul M mit $\operatorname{End} M \cong S$?

Wie ist ggf. ein solcher UT-Modul zu konstruieren?

Literatur

[1] P. Cohn, *Algebra* - Band 1, John Wiley & Sons, Chichester (1978).

[2] K. Devlin, *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer Verlag, New York (1979).

[3] M. Droste, *Structure of partially ordered sets with transitive automorphism groups*, Memoirs of the Am. Math. Soc. **57** (1985), Number 334.

[4] M. Dugas, S. Shelah, *E-Transitive Groups in L*, Abelian Group Theorie, Proc. Perth Conf. 1987, Contemp. Math. **87** (1989), 191–199.

[5] P. Eklof, A. Mekler, *Almost Free Modules*, Elsevier Science, Amsterdam (2002).

[6] L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups* - Band 1,2, Academic Press, New York (1970,1973).

[7] R. Göbel, J. Trlifaj, *Approximation Theory and Endomorphism algebras*, Walter de Gruyter, Berlin (2004).

[8] R. Göbel, S. Shelah, *Uniquely Transitive Torsion-Free Abelian Groups*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (2004).

[9] B. Goldsmith, *Essentially indecomposable modules which are almost free*, Quart. J. Math. Oxford (2), **39** (1988), 213-222.

[10] R. Jensen, *The fine structure of the constructible hierarchy*, Ann. Math. Logic **4** (1972), 229–308.

[11] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups*, University of Michigan Press (1971).

[12] R. B. Mura, A. Rhemtulla, *Orderable groups*, Marcel Dekker, New York (1977)

[13] S. K. Sehgal, *Units in integral group rings*, Pitman Monographs, New York (1993)